2015 年度予備テスト

(2015 年 4 月 7 日 (火))

試験に関する注意事項

(1) 試験時間 (3 時間) は黒板に記載する.

(2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない.

(3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.

(4) 各問 3 点満点, 計 12 点満点とし, 9 点以上を合格とする.

(5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.

(6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

(1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.

(2) 答案は問題毎 (原則として 1 枚以内) に作成すること.

(3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.

(4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.

(5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.

(6) もし途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

(1) 合否については, 4 月 10 日 (金) より多元数理科学研究科教育研究支援室にて確認することができる. 答案の返却も 4 月 10 日 (金) より教育研究支援室にて行う.

(2) 不合格となってしまった場合, 基礎演習クラスを受講する必要がある. 基礎演習クラスは 4 月 15 日 (水) のガイダンスより開始するので, 不合格者は必ず出席すること.

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ.

(1) 次の広義積分が収束するための実数 p に対する必要十分条件と, そのときの広義積分の値を求めよ.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\, dx.$$

(2) 次の広義積分が収束しないことを示せ.

$$\int_1^\infty \frac{1}{(x^2+1)^{1/3}}\, dx.$$

(3) 次の広義積分が収束することを示せ.

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^2}\, dx$$

(ヒント: 例えば, 変数変換を利用する方法や, 部分積分を利用する方法などで示すことが出来る.)

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ が有界である (すなわち, ある正数 M が存在して, 任意の n に対して $|a_n| \le M$ が成り立つ) とし, べき級数

$$\sum_{n=0}^\infty a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots$$

を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) $|x| < 1$ となる実数 x について級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ は絶対収束することを示せ.

(2) 開区間 $(-1,1)$ 上の関数 f_N $(N = 1, 2, \dots)$ および f を

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n, \quad x \in (-1,1)$$

によって定める. このとき $x \in (-1,1)$ に対し

$$|f_N(x) - f(x)| \le \frac{M|x|^{N+1}}{1-|x|}$$

であることを示し, これを用いて任意の $R \in (0,1)$ に対して, 閉区間 $[-R, R]$ 上で f_N は f に一様収束することを示せ.

(3) 関数 f は開区間 $(-1,1)$ 上で連続であることを示せ.
(ヒント: ある区間上で連続関数の列がある関数に一様収束するとき, その区間で極限の関数も連続となることは証明せずに用いてよい. また, 多項式関数は連続であるということも証明せずに用いてよい.)

$\boxed{3}$　2 次以下の実数係数多項式全体のなす実ベクトル空間を

$$V = \{\, a + bx + cx^2 \,:\, a, b, c \in \mathbb{R} \,\}$$

とし, V 上の線形変換 D を

$$D \,:\, f(x) \mapsto \frac{d}{dx}\{(1+x)f(x)\}$$

により定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{Ker}\, D$ と $\mathrm{Im}\, D$ をそれぞれ求めよ.

(2) V の基底 $\{\, 1, 1+2x, 2x+3x^2 \,\}$ に関する D の表現行列を求めよ.

(3) D のすべての固有空間について, それぞれの基底を 1 組ずつ求めよ.

$\boxed{4}$

$n \geq 1$ として, V を n 次元実計量ベクトル空間 (内積空間) とする. V の零ベクトルを $\mathbf{0}$ で表す. V 上の内積を $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V)$ で表す. ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ が

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$$

をみたしているとき, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交するという. k を自然数とし, V の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ が直交系をなす (互いに直交している) とき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) $k < n$ とし, $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ が張る部分空間を W_k とする. W_k に含まれないベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ を 1 つとり, ベクトル $\boldsymbol{x}_{k+1} \in V$ を

$$\boldsymbol{x}_{k+1} := \boldsymbol{v} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}_i \rangle}{\langle \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i \rangle} \boldsymbol{x}_i$$

と定める. このとき, $\boldsymbol{x}_{k+1} \neq \mathbf{0}$ であることを確かめ, さらに $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}$ が直交系をなすことを示せ.

(3) V が直交基底 (互いに直交するベクトルたちからなる基底) をもつことを示せ.