

2014 年度予備テスト

(2014 年 4 月 7 日(月))

試験に関する注意事項

- (1) 試験時間(3時間)は黒板に記載する.
- (2) 試験開始後, 1時間半経過するまでは中途退出してはいけない.
- (3) 問題用紙は両面1枚, 答案用紙は4枚, 草稿用紙は4枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.
- (4) 各問3点満点, 計12点満点とし, 9点以上を合格とする.
- (5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.
- (6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

- (1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.
- (2) 答案は問題毎(原則として1枚以内)に作成すること.
- (3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.
- (4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.
- (5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.
- (6) もし途中で解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

- (1) 合否については, 4月10日(木)より多元数理科学研究科教育研究支援室にて確認することができる. 答案の返却も4月10日(木)より教育研究支援室にて行う.
- (2) 不合格となってしまった場合, 基礎演習クラスを受講する必要がある. 基礎演習クラスは4月16日(水)のガイダンスより開始するので, 不合格者は必ず出席すること.

1 以下の \mathbb{R}^2 上の関数について考える.

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & (y = x^3) \\ 0, & (y \neq x^3) \end{cases}$$

(1) $f(x, y)$ が原点において全微分可能かどうか, つまり

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - Ax - By}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

をみたす定数 A, B が存在するかどうかを調べ, 存在する場合には A, B の値を示し, 存在しない場合にはそれを証明せよ.

(2) $f(x, y)$ が原点においてすべての方向に方向微分可能であること, つまり任意の $0 \leq \theta < 2\pi$ に対して極限

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h \cos \theta, h \sin \theta) - f(0, 0)}{h}$$

が存在することを証明せよ.

(3) 以下の命題を示せ.

「 \mathbb{R}^2 上の関数 $g(x, y)$ が原点 $(0, 0)$ において全微分可能であるならば, $g(x, y)$ は原点においてすべての方向に方向微分可能である」

2 以下, I を开区間 $(-1, 1)$ とし, 関数はすべて I 上で定義されているものとする. 以下の問いに答えよ.

(1) 連続関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が I 上で f に一様収束していると仮定する. このとき, 積分値も収束すること, すなわち, $-1 < a < b < 1$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

が成り立つことを ε - N 論法により示せ. (注意: 連続関数列の一様収束極限として f は連続関数となる. 従って上式右辺の f の積分は存在する.)

(2) I 上の C^1 級の関数列 $\{f_n\}$ が C^1 級関数 f に一様収束しても f'_n が f' に各点収束するとは限らないことを次の例で確かめよ:

$$f(x) = 0, \quad f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, \quad (x \in I).$$

(3) I 上の C^1 級の関数列 $\{f_n\}$ が C^1 級関数 f に各点収束し, かつ f'_n が連続関数 g に一様収束すれば $f' = g$ となることを示せ.

3 実数を成分に持つ $m \times n$ 行列 A で定義される線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($v \mapsto Av$) に対して, 等式

$$(*) \quad n = \text{rank } A + \dim \text{Ker } f$$

が成り立つことが知られている. 以下ではこの事実を確認しよう.

e_1, \dots, e_n を \mathbb{R}^n の基本ベクトルとし, v_1, \dots, v_p を $\text{Ker } f$ の基底とする. 行列 A の列ベクトルを a_1, \dots, a_n とし, $r = \text{rank } A$ とおく. $\text{rank } A$ は A の列ベクトルのうち 1 次独立なものの最大個数であるから, a_1, \dots, a_n の中から r 個の 1 次独立なベクトル

$$a_{i_1}, \dots, a_{i_r} \quad (1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n)$$

を選ぶことができる. 以下を証明せよ (これにより, $(*)$ は証明される).

- (1) $e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$ は 1 次独立である.
- (2) i_1, \dots, i_r のどれとも異なる i に対して, a_i は a_{i_1}, \dots, a_{i_r} の 1 次結合で表すことができる.
- (3) 任意の $v \in \mathbb{R}^n$ は $e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, v_1, \dots, v_p$ の 1 次結合で表される.

4 P, Q を $PQ = QP$ を満たす n 次複素正方行列とし, P の固有値 λ に対する固有空間を W_λ とする. すなわち

$$W_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^n \mid Pv = \lambda v\}$$

とする. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) W_λ は \mathbb{C}^n の複素線形部分空間であることを示せ.
- (2) $v \in \mathbb{C}^n$ に対し $f(v) = Qv$ とするとき, $f(W_\lambda) \subseteq W_\lambda$ であることを示せ.
- (3) P の固有多項式が n 個の相異なる解をもつとき, P と Q を同時に対角化する基底が存在することを示せ.

(ヒント: (2) より, $\dim W_\lambda = 1$ のとき $v \in W_\lambda, v \neq 0$ となる v は Q の固有ベクトルとなることに注意せよ.)