

# 2013 年度予備テスト

## (2013 年 4 月 8 日(月))

### 試験に関する注意事項

- (1) 試験時間(3時間)は黒板に記載する。
- (2) 試験開始後、1時間半経過するまでは中途退出してはいけない。
- (3) 問題用紙は両面1枚、答案用紙は4枚、草稿用紙は4枚である。そのうち、答案用紙のみを回収する。他は持ち帰ること。
- (4) 各問3点満点、計12点満点とし、9点以上を合格とする。
- (5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること。また、不正行為は決してしないこと。
- (6) 携帯電話の電源は切っておくこと。

### 答案作成に関する注意事項

- (1) 各答案用紙の左上に問題番号、右上に学生番号、氏名を記入すること。
- (2) 答案は問題毎(原則として1枚以内)に作成すること。
- (3) 裏面を使用するときは、表面の最後にその旨を明記すること。
- (4) 数学的論証の表現力も採点対象とする。いきなり答案用紙に書くのではなく、草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと。
- (5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので、論証においては「明らかに」という表現は避け、論証の要点を的確に記すこと。また、解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと。
- (6) もし途中で解けない小問があっても、その結果を認めて後続の小問を解いて構わない。

### 試験後の注意事項

- (1) 合否については、4月11日(木)より多元数理科学研究科教育研究支援室にて確認することができる。答案の返却も4月11日(木)より教育研究支援室にて行う。
- (2) 不合格となってしまった場合、基礎演習クラスを受講する必要がある。基礎演習クラスは4月17日(水)のガイダンスより開始するので、不合格者は必ず出席すること。



1  $n$  を負でない整数として,  $\mathbb{R}$  上の関数  $f_n$  を以下のように定義する:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

以下の問いに答えよ.

- (1)  $f_0$  が  $\mathbb{R}$  上連続ではないことを,  $\varepsilon$ - $\delta$  論法を用いて示せ.
- (2)  $f_n$  が  $\mathbb{R}$  上連続となる  $n$  のうち, 最小のものを求めよ.
- (3)  $f_n$  が  $\mathbb{R}$  上  $C^1$  級となる  $n$  のうち最小のものを求め, このときの  $f_n(x)$  のグラフの概形を図示せよ.

2  $\mathbb{R}$  上の定数でない  $C^1$  級の関数  $f$  が, 1 を周期とする周期関数である (つまり任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して  $f(x+1) = f(x)$  を満たす) とき, 以下の問いに答えよ.

- (1)  $f$  は  $\mathbb{R}$  上の有界関数であることを示せ. (ヒント:  $f$  の閉区間  $[0, 1]$  への制限を考えよ.)
- (2) ある定数  $C > 0$  が存在して, 任意の実数  $N > M > 0$  に対して,

$$\left| \int_M^N \frac{f'(x)}{x} dx \right| \leq \frac{C}{M}$$

が成り立つことを示し, 積分

$$I = \int_1^\infty \frac{f'(x)}{x} dx$$

が収束することを確認せよ. (ヒント: 前半は部分積分を利用せよ. 後半はコーシーの収束条件を利用せよ.)

- (3) 導関数  $f'$  も周期 1 の周期関数となる. これを用いて, 任意の自然数  $n$  に対して

$$\int_n^{(n+1)} \frac{|f'(x)|}{x} dx \geq \frac{1}{(n+1)} \int_0^1 |f'(x)| dx$$

が成り立つことを示せ. また, 積分  $I$  が絶対収束しないことを示せ.

3  $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$  に対し, 以下の問に答えよ. ただし

$$M_{mn}(\mathbb{R}) = \{m \times n \text{ の実行列全体} \}$$

である.

(1)  $\mathbb{R}^n$  の部分空間  $V, W$  を

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}, \quad W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid {}^tAAx = 0\}$$

と定めるとき,  $V = W$  であることを示せ. ただし  ${}^tA$  は  $A$  の転置行列を表す.

(2) 特に,  $m \geq n$  かつ  $\text{rank } A = n$  を仮定すると,  ${}^tAA$  は正則行列となることを示せ.

(3)  $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$  とする ((2) の条件は仮定しない).  $x \in \mathbb{R}^n$  についての方程式

$${}^tAAx = {}^tAa$$

は任意の  $a \in \mathbb{R}^m$  に対し, 解をもつことを示せ.

(ヒント:  $X = \{{}^tAAx \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ ,  $Y = \{{}^tAy \mid y \in \mathbb{R}^m\}$  とおき,  $X = Y$  となることを示すとよい.)

4  $V$  を体  $K$  上の有限次元ベクトル空間とし,  $V$  から  $K$  への線形写像全体の集合を  $V^*$  で表す.  $\varphi, \psi \in V^*$ ,  $a \in K$  に対して, 和  $\varphi + \psi \in V^*$ , スカラー倍  $a\varphi \in V^*$  を

$$(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v), \quad (a\varphi)(v) = a(\varphi(v)) \quad (v \in V)$$

と定めることにより,  $V^*$  はベクトル空間となる.

以下,  $U, V$  を体  $K$  上の有限次元ベクトル空間,  $f : U \rightarrow V$  を線形写像とし, 写像  $f^* : V^* \rightarrow U^*$  を

$$(f^*(\varphi))(u) = \varphi(f(u)) \quad (\varphi \in V^*, u \in U)$$

によって定義する. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $f^*(\varphi)$  が実際に  $U^*$  の元であること, すなわち  $f^*(\varphi) : U \rightarrow K$  が線形写像であることを示せ.
- (2)  $f^*$  は線形写像であることを示せ.
- (3)  $f$  が全射ならば,  $f^*$  は単射になることを証明せよ.