2008 年度予備テスト
第 1 回 2008 年 4 月 9 日(水)

試験に関する注意事項

(1) 試験時間 (3 時間) は黒板に記載する.

(2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない.

(3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.

(4) 各問 3 点満点, 計 12 点満点とし, 9 点以上を合格とする.

(5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.

(6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

(1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.

(2) 答案は問題毎 (原則として 1 枚以内) に作成すること.

(3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.

(4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.

(5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.

(6) もし途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

(1) 合否については, 4 月 11 日 (金) には多元数理科学研究科教育研究支援室にて確認することができる. 答案の返却は 4 月 16 日 (水) 以降に教育研究支援室にて行う.

(2) 不合格となってしまった場合, 次回の予備テストを受験する必要がある. 次回は 7 月末 (あるいは 8 月初め) に行う予定である. 次回予備テストの問題は, 少なくとも半数が予備テスト問題集 (2007 年 12 月改訂版) の類題である. 過去問および予備テスト問題集は, 多元数理のホームページより入手可能である.

$\boxed{1}$ 区間 I 上で定義された関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が I 上で関数 f に一様収束するとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 次の条件をみたす番号 N が存在するときに言う：

「$n \geq N$ なる任意の自然数 n と任意の $x \in I$ について, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$」.

これについて以下の問いに答えよ.

(1) 閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $[0,1]$ 上で 0 に一様収束しているとき, 以下が成立するとを示せ：

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$$

(2) 開区間 $(0,1)$ 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $(0,1)$ 上で関数 f に一様収束しているとき, f もまた $(0,1)$ 上の連続関数となることを示せ.

(3) 以下の条件を同時に満たすような開区間 $(0,1)$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の例を挙げよ. また, 実際に条件を満たしていることも示せ.

(a) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $(0,1)$ 上で 0 に<u>各点収束</u>する

(b) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $(0,1)$ 上で 0 に一様収束しない

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ.

(1) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の微分可能な関数 $f(x,y)$ に対して $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とおく. このとき, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を計算して $\dfrac{\partial g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$, r, θ の式で表せ.

(2) 問い (1) の記号を用いる. このとき

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2$$

を示せ.

(3) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ とし, $D \setminus \{(0,0)\}$ 上の関数

$$f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}, \qquad (x,y) \in D \setminus \{(0,0)\}$$

を考える. また, $\alpha > 0$ とする. このとき, 広義積分

$$\iint_{D\setminus\{(0,0)\}} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)^{\alpha} dxdy$$

の収束・発散を判定せよ.

$\boxed{3}$　V を体 K 上のベクトル空間, W を V の部分ベクトル空間とする. V の元たちの間の 2 項関係 $\sim$ を

$$v \sim v' \Longleftrightarrow v - v' \in W$$

によって定義する. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\sim$ は同値関係であることを示せ.

(つまり, 反射律 $v \sim v$, 対称律 $v \sim v' \Rightarrow v' \sim v$, 推移律 $v \sim v'$ かつ $v' \sim v'' \Rightarrow v \sim v''$ の 3 つの性質について示せ. ただし, W に関するどのような仮定をどう使ったか分かるように詳しく書け.)

以下では, V の元の同値関係 $\sim$ による同値類の集合 $V/\sim$ を考える. また, $v \in V$ の同値類を $\overline{v}(\in V/\sim)$ と表す.

(2) V のベクトル v, v', w, w' が $v \sim v', w \sim w'$ を満たすとき, 任意の K の元 a, b に対して $av + bw \sim av' + bw'$ であることを示せ.

これより $x, y \in V/\sim$ と $a, b \in K$ に対して, $ax + by \in V/\sim$ を $\overline{av + bw}$ と定めることができる. ただし, v, w はそれぞれ x, y に属する V のベクトルを表す. さらに, ここで定めた和とスカラー倍によって $V/\sim$ は K 上のベクトル空間になる. これを V の W による商ベクトル空間と呼び V/W と表す.

(3) W の基底 $\langle e_1, e_2, \cdots, e_r \rangle$ を含む V の基底 $\langle e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_n \rangle$ を取る. このとき $\langle \overline{e_{r+1}}, \cdots, \overline{e_n} \rangle$ は V/W の基底であることを示せ.

(これより $\dim_K V = \dim_K W + \dim_K (V/W)$ であることがわかる.)

$\boxed{4}$　V を体 K 上の有限次元ベクトル空間とし, V から K への線形写像全体の集合を V^* で表す. $\varphi, \psi \in V^*$, $a \in K$ に対して, 和 $\varphi + \psi \in V^*$, スカラー倍 $a\varphi \in V^*$ を

$$(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v), \quad (a\varphi)(v) = a(\varphi(v)) \quad (v \in V)$$

と定めることにより, V^* はベクトル空間となる.

以下, U, V を体 K 上の有限次元ベクトル空間, $f : U \to V$ を線形写像とし, 写像 $f^* : V^* \to U^*$ を

$$(f^*(\varphi))(u) = \varphi(f(u)) \quad (\varphi \in V^*, u \in U)$$

によって定義する. 以下の問いに答えよ.

(1)　$f^*(\varphi)$ が実際に U^* の元であること, すなわち $f^*(\varphi) : U \to K$ が線形写像であることを示せ.

(2)　f^* は線形写像であることを示せ.

(3)　f が全射ならば, f^* は単射になることを証明せよ.