2007 年度予備テスト
第 3 回 2007 年 12 月 8 日(土)

試験に関する注意事項

(1) 試験時間 (3 時間) は黒板に記載する.

(2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない.

(3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.

(4) 各問 3 点満点, 計 12 点満点とし, 9 点以上を合格とする.

(5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.

(6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

(1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.

(2) 答案は問題毎 (原則として 1 枚以内) に作成すること.

(3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.

(4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.

(5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.

(6) もし途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

(1) 合否については, 12 月 13 日 (木) には多元数理科学研究科事務室にて確認することができる. 答案については後日返却する.

(2) 不合格となってしまった場合, 次回の予備テストを受験する必要がある. 次回は 4 月初めに行う予定である. 各予備テストの問題は，少なくとも半数が予備テスト問題集の類題である．次回の試験では 2007 年度 10 月改訂版が使用される予定であるが，字句の修正等若干の改訂の可能性がある．問題集は，多元数理のホームページより入手可能である．

$\boxed{1}$　$a > b > 0$ を満たす定数 a, b に対し，$\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$$

を定義する．以下の問いに答えよ．

(1)　$\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y) = 0$ となる点を全て求めよ．

(2)　$f(x,y)$ の極大値，極小値およびそれらを与える点を全て求めよ．

(3)　(2) で求めた $f(x,y)$ の極大値は実は最大値になっている．これを証明せよ．ただし,「有界閉集合上の連続関数は必ず最大値を持つ」という命題は証明無しに用いてもよい．

$\boxed{2}$　(1)　次の広義積分が収束するための実数 p の必要十分条件を求めよ．

$$\int_0^1 (1-x)^p dx$$

(2)　次の広義積分が収束することを示せ．

$$\int_0^1 \frac{1}{\{x(1-x)\}^{1/3}} dx$$

(3)　次の広義積分が収束しないことを示せ．

$$\int_1^\infty \frac{2 + \sin e^x}{x} dx$$

$\boxed{3}$　A, B を複素数成分の 3 次正方行列とする．

> A が相異なる 3 つの固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ をもち，$AB = BA$ が成り立つならば，B は A^2, A, および単位行列 E の一次結合で表される．

以下, この主張を証明しよう．
v_1, v_2, v_3 をそれぞれ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対する A の固有ベクトルとする．また，行列 P_1, P_2, P_3 を次式で定義する：

$$P_1 = \frac{(A-\lambda_2 E)(A-\lambda_3 E)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)},\quad P_2 = \frac{(A-\lambda_3 E)(A-\lambda_1 E)}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)},\quad P_3 = \frac{(A-\lambda_1 E)(A-\lambda_2 E)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}.$$

(1) $P_1 v_1, P_1 v_2, P_1 v_3$ を計算せよ．また, その結果などを用いて, v_1, v_2, v_3 が一次独立 (従って $\mathbb{C}^3$ の基底) であることを確かめよ．

(2) $1 \le i \le 3$ とする．Bv_i は零ベクトル $\mathbf{0}$ であるか, A の固有値 λ_i に対する固有ベクトルであるかのいずれかであることを示せ．

(2) より，各 $1 \le i \le 3$ に対し，$Bv_i = \mu_i v_i$ となる複素数 μ_i が存在することが分かる．

(3) B は P_1, P_2, P_3 の一次結合で表されることを，表示式を与えることにより示せ．

$\boxed{4}$　(1) V を n 次元複素ベクトル空間, W を m 次元複素ベクトル空間とし, $f : V \to W$ を線形写像とする．また $g : V \to V$ と $h : W \to W$ を線形同型写像とする．このとき, 以下の問いに答えよ．

(ア) $\dim \mathrm{Im}\,(f \circ g) = \dim \mathrm{Im}\,(f)$ を示せ．

(イ) $\dim \mathrm{Im}\,(h \circ f) = \dim \mathrm{Im}\,(f)$ を示せ．

(2) A を, 複素数を成分に持つ $m \times n$ 行列とし, n 次正則行列 B, B', m 次正則行列 C, C', 整数 $r \ge 0$, $r' \ge 0$ に対して, 関係式

$$(*) \qquad CAB = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}, \qquad C'AB' = \begin{bmatrix} E_{r'} & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

が成り立っているとする．ただし E_r, $E_{r'}$ はそれぞれ r 次, r' 次単位行列を表し, O は適当な大きさのゼロ行列を表す．このとき $r = r'$ が成り立つことを示し, 式 $(*)$ を満たすような r は A のみに依存し, B, C などの取り方には依存しないことを確認せよ．