2007 年度予備テスト
第 2 回 2007 年 7 月 28 日(土)

試験に関する注意事項

(1) 試験時間 (3 時間) は黒板に記載する.

(2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない.

(3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.

(4) 各問 3 点満点, 計 12 点満点とし, 9 点以上を合格とする.

(5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.

(6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

(1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.

(2) 答案は問題毎 (原則として 1 枚以内) に作成すること.

(3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.

(4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.

(5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.

(6) もし途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

(1) 合否については, 7 月 31 日 (火) には多元数理科学研究科事務室にて確認することができる. 答案の返却は 8 月 3 日 (金) 以降に事務室にて行う.

(2) 不合格となってしまった場合, 次回の予備テストを受験する必要がある. 次回は 12 月上旬 に行う予定である. 各予備テストの問題は，少なくとも半数が予備テスト問題集の類題である．問題集は，多元数理のホームページより入手可能であるが，次回の試験では２００７年度版（改訂版）が使用されるので注意すること.

$\boxed{1}$　正の実数 x に対して定義された実数値関数 $g(x)$ と実定数 a に対して，$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を以下のように定義する．

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x > 0 \\ a, & x = 0 \\ g(-x), & x < 0 \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．

(1)

$$g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad x > 0$$

とする．このとき，$f(x)$ が $x = 0$ で連続になるように a の値を定めよ．また，このとき $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 全体で C^1-級となるか？$f'(x)$ を計算して確かめよ．

(2) $f(x)$ が $x = 0$ で微分可能ならば，必ず $f'(0) = 0$ であることを示せ．

(3) 以下の (i), (ii) を満たす $g(x)$ の例を挙げ，そのことを説明せよ．

　(i) $g(x)$ は $x > 0$ で <u>有界</u> かつ <u>連続</u> な関数．

　(ii) a をどのような値に定めても，$f(x)$ は $x = 0$ で連続にならない．

$\boxed{2}$　$\mathbb{R}$ 上の定数でない C^1-級の関数 f が, $\omega > 0$ を周期とする周期関数である (つまり任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x + \omega) = f(x)$ を満たす) とき, 以下の問いに答えよ.

(1) f は $\mathbb{R}$ 上の有界関数であることを示せ. (ヒント. f の閉区間 $[0, \omega]$ への制限を考えよ.)

(2) ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の実数 $N > M > 0$ に対して,

$$\left| \int_M^N \frac{f'(x)}{x} \, dx \right| \leq \frac{C}{M}$$

が成り立つことを示し, 積分

$$I = \int_\omega^\infty \frac{f'(x)}{x} \, dx$$

が収束することを確かめよ. ただし, f' は f の導関数を表す. (ヒント. 前半は，部分積分を利用せよ．後半はコーシー列を利用せよ．)

(3) 導関数 f' も周期 ω の周期関数となる. これを用いて, 任意の自然数 n に対して

$$\int_{n\omega}^{(n+1)\omega} \frac{|f'(x)|}{x} \, dx \geq \frac{D}{(n+1)\omega}, \quad D = \int_0^\omega |f'(x)| \, dx$$

が成り立つことを示せ. また, 積分 I が絶対収束しないことを示せ.

$\boxed{3}$ V を体 K 上の有限次元ベクトル空間とし, V から K への線形写像全体の集合を V^* で表す. $\varphi, \psi \in V^*$, $a \in K$ に対して, 和 $\varphi + \psi \in V^*$, スカラー倍 $a\varphi \in V^*$ を

$$(\varphi+\psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v), \quad (a\varphi)(v) = a(\varphi(v)) \quad (v \in V)$$

と定めることにより, V^* はベクトル空間となる. $\dim V^* = \dim V$ であることを，以下で示そう．$v_1, v_2, \ldots, v_n$ を V の基底とする．各 $1 \leq i \leq n$ に対し，写像 $\varphi_i \colon V \to K$ を

$$\varphi_i(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_i \quad (a_1, \ldots, a_n \in K)$$

で定義する．特に，$\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$ (クロネッカーの記号) である．

(1) $\varphi_i \in V^*$ を示せ.

(2) ψ を V^* の任意の元とする． $\psi = \psi(v_1)\varphi_1 + \cdots + \psi(v_n)\varphi_n$ を示せ.

(3) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ が一次独立であることを示せ.

(1),(2),(3) より $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ は V^* の基底であり，従ってまた，$\dim V^* = n = \dim V$ である.

$\boxed{4}$ ちょうど 2 つの固有値 λ_1, λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) をもつ 3 次複素正方行列 A を考える. また, 固有値 λ_1, λ_2 に対する固有空間を, それぞれ W_1, W_2 とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 部分空間の和 $W_1 + W_2$ が直和 $W_1 \oplus W_2$ であることを示せ.

(2) $W_1 \oplus W_2 \neq \mathbb{C}^3$ となる行列 A の例を 1 つあげ, その行列 A に対して W_1, W_2 の基底を 1 つ求めよ. また, A が対角化可能かどうか, 答えのみ述べよ. ただし, λ_1, λ_2 は各自適当に選んでよい.

(3) $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{C}^3$ の場合, A は対角化可能である. その理由を簡潔に説明せよ.