2006 年度予備テスト
第 3 回 2006 年 12 月 9 日(土)

試験に関する注意事項

(1) 試験時間 (3 時間) は黒板に記載する.

(2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない.

(3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.

(4) 各問 3 点満点, 計 12 点満点とし, 9 点以上を合格とする.

(5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.

(6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

(1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.

(2) 答案は問題毎 (原則として 1 枚以内) に作成すること.

(3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.

(4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.

(5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.

(6) もし途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

(1) 合否については, 12 月 14 日 (木) には多元数理科学研究科事務室にて確認することができる. 答案については後日返却する.

(2) 不合格となってしまった場合, 次回の予備テストを受験する必要がある. 次回は 4 月初めに行う予定である.

$\boxed{1}$ 命題

(∗)　「べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $x = 1$ に対して収束するならば, このべき級数は $|x| < 1$ を満たすすべての実数 x に対して絶対収束する」

を証明するために, 以下の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}$ が収束するならば $\{a_n\}$ は有界であることを, 「収束の ε-N 式の定義」に基づいて示せ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束することを示せ.

(3) 上記の問い (1), (2) を用いて命題 (∗) を示せ.

$\boxed{2}$ f を $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級実数値関数とし, 点 $x = {}^t(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して, ベクトル $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^2$ と 2 次実対称行列 $H_f(x)$ を次で定義する:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x) \\ \partial_{x_2} f(x) \end{pmatrix}, \quad H_f(x) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1x_1} f(x) & \partial_{x_1x_2} f(x) \\ \partial_{x_2x_1} f(x) & \partial_{x_2x_2} f(x) \end{bmatrix}.$$

ただしここで,

$$\partial_{x_1} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2), \quad \partial_{x_1x_2} f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2)$$

などと略記した. また $\mathbb{R}^2$ の内積を $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$, $x = {}^t(x_1, x_2)$, $y = {}^t(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ で定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}^2$ と $0 \le t \le 1$ に対して, 次の式を示せ:

$$\frac{d}{dt} f(tx) = \langle \nabla f(tx),\, x\rangle.$$

(2) 問い (1) の式に $\{-(1-t)\}' = 1$ をかけ, 閉区間 $[0, 1]$ で t について部分積分することにより, 次の式を示せ. (ただし $\mathbf{0} = {}^t(0, 0)$ は $\mathbb{R}^2$ の原点を表す.)

$$f(x) = f(\mathbf{0}) + \langle \nabla f(\mathbf{0}),\, x\rangle + \int_0^1 (1-t)\langle H_f(tx)x,\, x\rangle\, dt.$$

(3) $\nabla f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ と仮定する. また, 任意の $x \in \mathbb{R}^2$ に対して $H_f(x)$ が半正定値 (つまり固有値が全て非負) であるとする. このとき, 任意の $x \in \mathbb{R}^2$ と任意の $v \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$\langle H_f(x)v,\, v\rangle \ge 0$$

を示すことにより, f が $\mathbf{0}$ で最小値を取ることを結論せよ.

$\boxed{3}$　V を体 K 上の有限次元ベクトル空間とし, V から K への線形写像全体の集合を V^* で表す. $\varphi, \psi \in V^*$, $a \in K$ に対して, 和 $\varphi + \psi \in V^*$, スカラー倍 $a\varphi \in V^*$ を

$$(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v), \quad (a\varphi)(v) = a(\varphi(v)) \quad (v \in V)$$

と定めることにより, V^* はベクトル空間となる.

以下, U, V を体 K 上の有限次元ベクトル空間, $f : U \to V$ を線形写像とし, 写像 $f^* : V^* \to U^*$ を

$$(f^*(\varphi))(u) = \varphi(f(u)) \quad (\varphi \in V^*, u \in U)$$

によって定義する. 以下の問に答えよ.

(1)　$f^*(\varphi)$ が実際に U^* の元であること, すなわち $f^*(\varphi) : U \to K$ が線形写像であることを示せ.

(2)　f^* は線形写像であることを示せ.

(3)　f が全射ならば, f^* は単射になることを証明せよ.

$\boxed{4}$　3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の内積を

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{3} v_i w_i, \quad v = {}^t(v_1, v_2, v_3),\ w = {}^t(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$$

で定める. 3 次実正則行列 P が,

$$\text{任意の } v, w \in \mathbb{R}^3 \text{ に対して } \langle Pv, Pw \rangle = \langle v, w \rangle$$

を満たしていると仮定する. このとき, 固有多項式の考察から, P は少なくとも 1 つの実固有値を持つことが分かる. この行列 P について以下の問いに答えよ.

(1) P の実固有値は 1 または -1 であることを示せ.

以下では, P が 1 を固有値として持つことを仮定する.

(2) $e_1 \in \mathbb{R}^3$ を $Pe_1 = e_1$, $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$ となるようにとり,

$$W = \{w \in \mathbb{R}^3 ; \langle w, e_1 \rangle = 0\}$$

とおく. このとき,

$$w \in W \Longrightarrow Pw \in W$$

が成り立つことを示せ.

(3) P の定める線形写像はどのようなものであるかを, 理由を添えて述べよ.