

2006 年度予備テスト

第 2 回 2006 年 7 月 29 日(土)

試験に関する注意事項

- (1) 試験時間(3 時間)は黒板に記載する.
- (2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない.
- (3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.
- (4) 各問 3 点満点, 計 12 点満点とし, 9 点以上を合格とする.
- (5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.
- (6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

- (1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.
- (2) 答案は問題毎(原則として 1 枚以内)に作成すること.
- (3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.
- (4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.
- (5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.
- (6) もし途中で解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

- (1) 合否については, 8 月 2 日(水)には多元数理科学研究科事務室にて確認することができる. 答案については後日返却する.
- (2) 不合格となってしまった場合, 次回の予備テストを受験する必要がある. 次回は 12 月に行う予定である.

1 命題

- (*) 「べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $x = 1$ に対して収束するならば, このべき級数は $|x| < 1$ を満たすすべての実数 x に対して絶対収束する」

を証明するために, 以下の問いに答えよ.

- (1) 数列 $\{a_n\}$ が収束するならば $\{a_n\}$ は有界であることを, 「収束の ε - N 式の定義」に基づいて示せ.
- (2) 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束することを示せ.
- (3) 上記の問い (1), (2) を用いて命題 (*) を示せ.

2 以下の問いに答えよ.

- (1) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上の微分可能な関数 $f(x, y)$ に対して $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ とおく. このとき, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を計算して $\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}, r, \theta$ の式で表せ.
- (2) 問い (1) の記号を用いる. このとき

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2$$

を示せ.

- (3) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ とし, $D \setminus \{(0, 0)\}$ 上の関数

$$f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in D \setminus \{(0, 0)\}$$

を考える. このとき, 広義積分

$$\iint_{D \setminus \{(0, 0)\}} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right)^\alpha dx dy$$

の収束・発散を, $\alpha = 1, \alpha = \frac{1}{3}$ それぞれの場合に判定せよ.

□3 ちょうど 2 つの固有値 λ_1, λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) をもつ 3 次複素正方行列 A を考える. また, 固有値 λ_1, λ_2 に対する固有空間を, それぞれ W_1, W_2 とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 部分空間の和 $W_1 + W_2$ が直和 $W_1 \oplus W_2$ であることを示せ.
- (2) $W_1 \oplus W_2 \neq \mathbb{C}^3$ となる行列 A の例を 1 つあげ, その行列 A に対して W_1, W_2 の基底をそれぞれ 1 組求めよ. また, A が対角化可能かどうか, 答えのみ述べよ. ただし, λ_1, λ_2 は各自適当に選んでよい.
- (3) $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{C}^3$ の場合, A は対角化可能である. その理由を簡潔に説明せよ.

□4 V を有限次元実計量ベクトル空間 (内積空間) とし, (u, v) で 2 つのベクトル $u, v \in V$ の内積をあらわす. W を V の部分空間とする. また, W のすべてのベクトルと直交するような V のベクトルの全体を W^\perp とおく:

$$W^\perp = \{v \in V; (v, w) = 0 \text{ が任意の } w \in W \text{ に対して成り立つ}\}.$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) W^\perp は V の部分空間であることを示せ.
- (2) w_1, \dots, w_r を W の正規直交基底とする. このとき, $x \in V$ に対して,

$$x - (c_1 w_1 + \dots + c_r w_r) \in W^\perp$$

となるような実数 c_j ($j = 1, \dots, r$) を, 内積を用いて表せ.

- (3) v_1, \dots, v_s を W^\perp の任意の基底とすると, $w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s$ は V の基底となることを示せ. また, これから

$$\dim V = \dim W + \dim W^\perp$$

が成り立つことを結論せよ.