2006 年度予備テスト
第 1 回 2006 年 4 月 8 日(土)

試験に関する注意事項

(1) 試験時間 (3 時間) は黒板に記載する.

(2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない.

(3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.

(4) 各問 3 点満点, 計 12 点満点とし, 9 点以上を合格とする.

(5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.

(6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

(1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.

(2) 答案は問題毎 (原則として 1 枚以内) に作成すること.

(3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.

(4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.

(5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.

(6) もし途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

(1) 合否については, 4 月 11 日 (火) には多元数理科学研究科事務室にて確認することができる. 答案については後日返却する.

(2) 不合格となってしまった場合, 次回の予備テストを受験する必要がある. 次回は 7 月末 (あるいは 8 月初) に行う予定である.

$\boxed{1}$ 正の数 $x > 0$ と $r > 0$ に対して次の積分を考える:

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt, \quad f_r(x) = \int_0^r \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt.$$

(1) 任意の $r, s > 0$ に対して

$$\sup_{x>0} |f_r(x) - f_s(x)| \le |e^{-r} - e^{-s}|$$

が成り立つことを示せ.

(2) 正の実数 r に対して, $\lim_{x\to\infty} f_r(x) = 0$ が成り立つことを示せ.

(3) 広義積分 $f(x)$ が $x > 0$ について一様収束することを示し, これと (2) を用いて $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ を導け. (ヒント. あるいは最後の主張については, 任意の $x > 0$ に対して

$$f(x) = f_1(x) + \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$$

として, 考えることもできる.)

$\boxed{2}$ C^1 級関数 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対して $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, g(x,y) = 0\}$ とおく. 以下では点 $(a,b) \in S$ において, $g_y(a,b) \neq 0$ と仮定する. このとき S の点 (a,b) での接線は,

$$S_{(a,b)} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-a)g_x(a,b) + (y-b)g_y(a,b) = 0\right\}$$

で与えられる. ただし g_x, g_y は, それぞれ x, y に関する偏導関数を表す.

(1) $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ のとき, $(a,b) \in S$ $(b \neq 0)$ での接線 $S_{(a,b)}$ を求め, 図示せよ.

仮定により陰関数定理を用いれば, a を含む開区間 I, b を含む開区間 J と C^1 級関数 $\varphi : I \to J$ が存在して, $(x,y) \in I \times J$ に対して「$g(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x)$」が成り立つ (特に $b = \varphi(a)$ である).
更に C^1 級関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が与えられているとする.

(2) 上の関数 f について, 関数 $h(t) := f(t, \varphi(t))$ の $t = a$ での微分係数を, $f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$, $\varphi'(a)$ を用いて表せ.

(3) 上の状況で, 関数 f は点 (a,b) で S 上での最小値を取ると仮定する. このとき,

$$(f_x(a,b), f_y(a,b)) = \lambda(g_x(a,b), g_y(a,b))$$

を満たす実数 λ が存在すること, すなわち, ベクトル $(f_x(a,b), f_y(a,b))$ は接線 $S_{(a,b)}$ と直交することを示せ.

$\boxed{3}$　U を実ベクトル空間 $\mathbb{R}^N$ の n 次元部分空間 $(n \geq 1)$, W を $\mathbb{R}^M$ の m 次元部分空間 $(m \geq 1)$ とする．このとき $\operatorname{Ker} f = U$, $\operatorname{Im} f = W$ を満たす線形写像 $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ が存在するための必要十分条件は $N = m + n$ であることを, 確認しよう．

以下, $u_1, \ldots, u_n$ を U の基底とする．

(1) 線形写像 $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ が $\operatorname{Ker} f = U$, $\operatorname{Im} f = W$ を満たすとき, $f(v_1), \ldots, f(v_m)$ が W の基底をなすような $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^N$ を選ぶ．このとき,

(a) $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m$ は 1 次独立であることを示せ．

(b) 任意の $v \in \mathbb{R}^N$ は $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m$ の 1 次結合で表されることを示せ．

($u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m$ は $\mathbb{R}^N$ の基底をなすので, $N = m + n$ となる.)

(2) 逆に $N = m + n$ のとき, $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m$ を $\mathbb{R}^N$ の基底, $w_1, \ldots, w_m$ を W の基底とし, 線形写像 f を

$$f(u_1) = \cdots = f(u_n) = \mathbf{0}, \quad f(v_i) = w_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

を満たすように定めるとき, $\operatorname{Ker} f = U$, $\operatorname{Im} f = W$ となることを示せ．

$\boxed{4}$　『実 2 次形式

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx$$

の単位球面 $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ における最大値は,

$$f(x, y, z) = (x, y, z)A\ {}^t(x, y, z)$$

となる 3 次実対称行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ $(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3)$ とするとき, その最大固有値 λ_1 で与えられる．』

この主張に関連して, 次の問に答えよ．

(1) $f(x, y, z)$ は単位球面 Q において必ず最大値を取る．これはどのような数学的事実に基づくかを述べよ (証明する必要はない)．

(2) $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ とする．$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の内積を $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$ として定めるとき, 任意の 3 次実直交行列 S に対して,

$$\langle S\boldsymbol{v}, S\boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$$

が成り立つことを示せ．

(3) 3 次実対称行列 A の固有値はすべて実数であり, A は実直交行列 S によって対角化可能である．このような S の構成方法を述べよ．また, この事実を用いて上の主張『　』が成り立つことを説明せよ．