

2005年度予備テスト 第2回 2005年7月30日(土)

試験に関する注意事項

- (1) 試験時間(3時間)は黒板に記載する。
- (2) 試験開始後、1時間半経過するまでは中途退出してはいけない。
- (3) 問題用紙は両面1枚、答案用紙は4枚、草稿用紙は4枚である。そのうち、答案用紙のみを回収する。他は持ち帰ること。
- (4) 各問3点満点、計12点満点とし、9点以上を合格とする。
- (5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること。また、不正行為は決してしないこと。
- (6) 携帯電話の電源は切っておくこと。

答案作成に関する注意事項

- (1) 各答案用紙の左上に問題番号、右上に学生番号、氏名を記入すること。
- (2) 答案は問題毎(原則として1枚以内)に作成すること。
- (3) 裏面を使用するときは、表面の最後にその旨を明記すること。
- (4) 数学的論証の表現力も採点対象とする。いきなり答案用紙に書くのではなく、草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと。
- (5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので、論証においては「明らかに」という表現は避け、論証の要点を的確に記すこと。また、解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと。
- (6) もし途中で解けない小問があっても、その結果を認めて後続の小問を解いて構わない。

試験後の注意事項

- (1) 合否については、8月1日(月)の午後には多元数理科学研究科事務室にて確認することができる。答案については後日返却する。
- (2) 不合格となってしまった場合、次回の予備テストを受験する必要がある。次回は12月初めに行う予定である。

1 \mathbb{R} 上の定数でない C^1 -級の関数 f が, $\omega > 0$ を周期とする周期関数である (つまり任意の $x \in \mathbb{R}$ と任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $f(x + n\omega) = f(x)$ を満たす) とき, 以下の問いに答えよ.

- (1) f は \mathbb{R} 上の有界関数であることを示せ. (ヒント. f の閉区間 $[0, \omega]$ への制限を考えよ.)
 (2) ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の実数 $N > M > 0$ に対して,

$$\left| \int_M^N \frac{f'(x)}{x} dx \right| \leq \frac{C}{M}$$

が成り立つことを示し, 積分

$$I = \int_{\omega}^{\infty} \frac{f'(x)}{x} dx$$

が収束することを確認せよ. ただし, f' は f の導関数を表す.

- (3) 導関数 f' も周期 ω の周期関数となる. これを用いて, 任意の自然数 n に対して

$$\int_{n\omega}^{(n+1)\omega} \frac{|f'(x)|}{x} dx \geq \frac{D}{(n+1)\omega}, \quad D = \int_0^{\omega} |f'(x)| dx$$

が成り立つことを示せ. また, 積分 I が絶対収束しないことを示せ.

2 \mathbb{R}^2 上で定義された関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^3 + y)}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x, y)$ は原点において任意の方向に方向微分可能である. つまり, $(0, 0)$ でない任意のベクトル $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ に対して, 関数

$$g(t) = f(at, bt)$$

が $t = 0$ で微分可能であることを示せ. また, $g'(0)$ を a, b を用いて表せ.

- (2) 関数 $f(x, y)$ は原点において連続でないことを示せ.
 (3) 関数 $f(x, y)$ に対して,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - Ax - By}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

となる定数 A, B は存在しないことを示せ. (ヒント. このような定数 A, B が存在すれば, 関数 f は原点で連続であることを示せばよい.)

□3 f を n 次元実ベクトル空間 V 上の線形変換とし, $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s \in V$ は次の 2 条件を満たすと仮定する:

- (a) v_1, \dots, v_r は f の核 $\text{Ker } f$ の基底をなす.
- (b) $f(w_1), \dots, f(w_s)$ は f の像 $\text{Im } f$ の基底をなす.

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s$ は 1 次独立であることを示せ.
- (2) V の任意の元 v は $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s$ の 1 次結合の形に書けることを示せ.
- (3) (1), (2) より

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = n$$

であることが分かる. このことに注意して, f が単射ならば線形同型写像であることを示せ.

□4 V を n 次元実計量ベクトル空間 (内積空間) とし, V^* を V から \mathbb{R} への線形写像全体のなす集合とする. $f, g \in V^*, c \in \mathbb{R}$ に対して

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = c \cdot f(x) \quad (x \in V)$$

により $f + g, cf$ を定めると, V^* は実ベクトル空間になる (V の双対空間という).

このとき, $v \in V$ に対して, 写像 $\varphi_v : V \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\varphi_v(x) = (v, x) \quad (x \in V) \quad (\text{ただし } (v, x) \text{ は } v \text{ と } x \text{ の内積を表す})$$

により定めると, $\varphi_v \in V^*$ になる. また, 写像 $\Phi : V \rightarrow V^*$ を

$$\Phi : V \ni v \mapsto \varphi_v \in V^*$$

で定義する. 以下の問いに答えることにより, $\Phi : V \rightarrow V^*$ が線形同型写像であることを確認せよ.

- (1) Φ は線形写像であることを示せ.
- (2) Φ は単射である (すなわち, $v, w \in V$ に対して $\varphi_v = \varphi_w$ ならば $v = w$ である) ことを示せ.
- (3) e_1, \dots, e_n を V の正規直交基底とする. このとき, $f \in V^*$ に対して $f = \varphi_v$ となる $v \in V$ を, e_1, \dots, e_n を用いて構成せよ. (特に Φ は全射である.)