2004年度予備テスト
第2回 2004.7.31

試験に関する注意事項

(1) 試験時間 (3時間) は黒板に記載する.
(2) 試験開始後, 1時間半経過するまでは中途退出してはいけない.
(3) 問題用紙は両面1枚, 答案用紙は4枚, 草稿用紙は4枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.
(4) 各問3点満点, 計12満点とし, 9点以上を合格とする.
(5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.
(6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

(1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.
(2) 答案は問題毎 (原則として1枚以内) に作成すること.
(3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にそれを明記すること.
(4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.
(5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.
(6) もし途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

(1) 合否については, 8月2日 (月) の午後には数理学科事務室にて確認することができる. 答案については, 後日返却する.
(2) 不合格となってしまった場合, 次回の予備テストを受験する必要がある. 次回は12月に行う.

$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}$ に対して, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ (n = 1, 2, \ldots)$ とおく. 数列 $\{S_n\}$ が収束するとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束すると言う. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) 数列が収束することと, それがコーシー列となることは同値である. このことに注意して, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束すれば, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束することを証明せよ.

(2) (1) の逆が成立しないような数列 $\{a_n\}$ の例をあげ, その例について $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する理由を説明せよ.

(3) $2 \leq a < b < \infty$ のときの $\int_a^b \frac{1}{x(\log x)^2}\, dx$ を計算して, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ が収束することを示せ.

$\boxed{2}$ 次の各問に答えよ.

(1) $\mathbf{R}^2$ の原点の近傍で定義された関数 f は, ある定数 A, B に対して

$$f(x, y) = f(0, 0) + Ax + By + o(\sqrt{x^2 + y^2})$$

を満たすとき, すなわち,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - Ax - By}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

が成り立つとき, 原点で全微分可能であると言う.

(ア) f が原点で全微分可能であるとき, 原点で偏微分可能であり, $A = f_x(0, 0)$, $B = f_y(0, 0)$ が成り立つことを示せ.

(イ) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ は原点で偏微分可能であるが, 全微分可能ではない. このことを示せ.

(2) $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq 2x - y \leq 2,\ \ -1 \leq x + y \leq 1\}$ のとき, 重積分

$$\iint_D x \, dxdy$$

を $u = 2x - y$, $v = x + y$ と変数変換して計算せよ.

$\boxed{3}$ V, W を実ベクトル空間 $\mathbf{R}^N$ の部分空間とする. $V \cap W$ と $V + W$ は $\mathbf{R}^N$ の部分空間であり, それらの次元については次の公式 $(*)$ が知られている :

$$(*) \qquad \dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W).$$

以下, この公式を証明しよう. $\mathbf{R}^N$ の元 $u_1, \dots, u_l$, $v_1, \dots, v_r$, $w_1, \dots, w_s$ を

- $u_1, \dots, u_l$ は $V \cap W$ の基底
- $u_1, \dots, u_l$, $v_1, \dots, v_r$ は V の基底
- $u_1, \dots, u_l$, $w_1, \dots, w_s$ は W の基底

となるように選ぶとき, 次の 2 つの主張 (ア),(イ) が成り立つ.

(ア) $V+W$ の任意の元 x は, $u_1, \dots, u_l$, $v_1, \dots, v_r$, $w_1, \dots, w_s$ の線型結合で表される.
(イ) $u_1, \dots, u_l$, $v_1, \dots, v_r$, $w_1, \dots, w_s$ は線型独立である.

この (ア), (イ) より, $u_1, \dots, u_l$, $v_1, \dots, v_r$, $w_1, \dots, w_s$ は $V+W$ の基底をなすことが分かり, 公式 $(*)$ が得られる.

このとき, 次の各問に答えよ.

(1) 上の主張 (ア),(イ) をそれぞれ証明せよ.

(2) $V \cup W$ は必ずしも $\mathbf{R}^N$ の部分空間とはならないことを $N = 2$ の場合に例をあげて説明せよ.

$\boxed{4}$ $V = \mathbf{R}^N$ とおき, $f\colon V \to V$ を V 上の恒等的には 0 でない線型変換で, $f \circ f = f$ を満たすものとする. また, V 上の線型変換 g を

$$g(v) = v - f(v) \quad (v \in V)$$

により定める. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) $\operatorname{Im} g \subset \ker f$ を示せ.

(2) $V = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$ を示せ.

(3) 整数 r $(1 \le r \le N)$ と V の適当な基底 $v_1, \dots, v_N$ を選べば,

$$\begin{cases} f(v_i) = v_i & (i = 1, \dots, r) \\ f(v_i) = 0 & (i = r+1, \dots, N) \end{cases}$$

を満たすようにできることを示せ.