2004年度予備テスト
第1回 2004.4.3

試験に関する注意事項

(1) 試験時間 (3時間) は黒板に記載する.
(2) 試験開始後, 1時間半経過するまでは中途退出してはいけない.
(3) 問題用紙は両面1枚, 答案用紙は4枚, 草稿用紙は4枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.
(4) 各問3点満点, 計12満点とし, 9点以上を合格とする.
(5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.
(6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

(1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.
(2) 答案は問題毎 (原則として1枚以内) に作成すること.
(3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にそれを明記すること.
(4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.
(5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.
(6) もし途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

(1) 答案は4月7日 (水) に講評と共に返却する. 早めに数理学科事務室に取りに行くこと. ただし, 4月5日 (月) の午後には同事務室にて, 合否を確認することができる.
(2) 不合格となってしまった場合, 次回の予備テストを受験する必要がある. 次回は8月上旬に行う.

$\boxed{1}$ f を開区間 $(0,1)$ 上で定義された関数とする. f が一様連続であるとは,

$$(*)\begin{cases} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して, } \delta > 0 \text{ が存在して,} \\ |x-y| < \delta \text{ となるすべての } x,\, y \in (0,1) \text{ に対して,} \\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ が成り立つ} \end{cases}$$

ことである. 以下の問いに答えよ.

(1) f が微分可能であり, ある正数 M に対して $|f'(x)| \leq M$ $(\forall x \in (0,1))$ が成り立つならば, f は一様連続であることを示せ.
(ヒント. 平均値の定理)

(2) 一様連続な関数について, 次の事実が知られている.
「f が 開区間 $(0,1)$ で一様連続ならば, 閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数に拡張できる.」
この事実を示すために, 次を確認せよ.

(a) 数列 $\{f(\frac{1}{n})\}_{n=2}^{\infty}$ は有限の極限値を持つ. (ヒント. コーシー列)

(b) $A = \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})$ とするとき, $\lim_{x\to 0} f(x) = A$ である.
(ヒント. $|f(x) - A| \leq |f(x) - f(\frac{1}{n})| + |f(\frac{1}{n}) - A|$ を利用する)

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ.

(1) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ とする. $I^2 = \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, dxdy$ となる事実を利用して, I の値を求めよ.

(2) 実数 α に対して, 広義積分

$$A_\alpha := \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2-2\alpha xy}\, dxdy$$

を考える.

(a) 直交行列

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

を使って, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と変換すると, 2 次形式 $x^2 + y^2 + 2\alpha xy$ は $\lambda u^2 + \mu v^2$ の形になる. λ, μ の値を求め, 次を確認せよ:

$$A_\alpha = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\lambda u^2 - \mu v^2}\, dudv.$$

(b) 次の等式を認めて, 広義積分 A_α が収束する実数 α の範囲を求め, そのときの A_α の値を計算せよ.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\lambda u^2-\mu v^2}\, dudv = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda u^2}\, du\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu v^2}\, dv\right).$$

$\boxed{3}$　実数を成分に持つ $m \times n$ 行列 A で定義される線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v})$ に対して, 等式

$$(*) \quad n = \operatorname{rank} A + \dim \ker f$$

が成り立つことが知られている. 以下ではこの事実を確認しよう.

$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ を $\mathbb{R}^n$ の基本ベクトルとし, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ を $\ker f$ の基底とする. A の列ベクトルを $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ とし, $r = \operatorname{rank} A$ とおく. $\operatorname{rank} A$ は A の列ベクトルのうち 1 次独立なものの最大個数であるから, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ の中から r 個の 1 次独立なベクトル

$$\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r} \quad (1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n)$$

を選ぶことができる. 次の (1) ∼ (3) を示せ (これより, $(*)$ は示される).

(1) $\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_r}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$ は 1 次独立である.
(ヒント. まず, $f(\mathbf{e}_i)$ を計算せよ)

(2) $i_1, \ldots, i_r$ のどれとも異なる i に対して, $\mathbf{a}_i$ は $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}$ の 1 次結合で表すことができる. (ヒント. $\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}$ は 1 次従属である)

(3) 任意の $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ は $\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_r}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ の 1 次結合で表される.
(ヒント. まず, $f(\mathbf{v})$ を考えよ)

$\boxed{4}$　$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を線形写像で, $f^3 = 0$, $f^2 \neq 0$ を満たすものとする. f の Jordan 標準形を求めるために, 以下の (1) ∼ (3) に答えよ. (ただし, 問われている内容以外の主張は認めて良い)

$N_1 = \ker f$, $N_2 = \ker f^2$ とおくと,

$$\{0\} \subset N_1 \subset N_2 \subset \mathbb{R}^4$$

である. $\mathbb{R}^4 = N_2 \oplus W_1$ となる部分空間 W_1 を取る.

(1) $f(W_1) \subset N_2$, $f(W_1) \cap N_1 = \{0\}$ となることを示せ.

これより, $N_2 = N_1 \oplus W_2$, $f(W_1) \subset W_2$ となる部分空間 W_2 が存在する.

(2) $N_1 \cap W_1 = \{0\}$ であることを示し, f の W_1 への制限 $f|_{W_1}\colon W_1 \to W_2$ が単射であることを導け.

同様に, $f(W_2) \subset N_1$ であり, $f|_{W_2}\colon W_2 \to N_1$ も単射であるから, $\dim W_1 \leq \dim W_2 \leq \dim N_1$ である. $W_1 \neq \{0\}$ と $\mathbb{R}^4 = N_1 \oplus W_2 \oplus W_1$ に注意すれば, $\dim W_1 = \dim W_2 = 1$, $\dim N_1 = 2$ が分かる.

W_1 の基底を v_3 とし, $v_2 = f(v_3)$, $v_1 = f^2(v_3)$ とおく. $v_4 \in N_1$ を v_1, v_4 が N_1 の基底になるように選べば, v_1, v_2, v_3, v_4 は $\mathbb{R}^4$ の基底になる.

(3) この基底に関する f の表現行列 J を求めよ (この J が f の Jordan 標準形である).