2003年度予備テスト

第1回 2003.4.10

1. 数学的論証の表現力も採点対象とする．いきなり答案用紙に書くのではなく，草稿用紙でよく練ってから答案を書くこと．
2. あなたが正確に理解していることを示してもらうのがこのテストの目的であるので，論証においては「明らかに」という表現は避け論証の要点を的確に記すこと．また，解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと．
3. もし途中に解けない小問があっても後続の小問を解いて構わない．
4. 各問3点満点，計12点満点とし，合格点は9点である．

$\boxed{1}$ 命題

$(*)$　「べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $x=1$ に対して収束するならば，このべき級数は $|x|<1$ をみたすすべての実数 x に対して絶対収束する」

を証明するために，以下の問に答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ が収束するならば $\{a_n\}$ は有界であることを，「収束の $\varepsilon - N$ 式の定義」に基づいて示せ．

(2) 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば，数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束することを示せ．
(キーワード：部分和，コーシー列)

(3) (1), (2) を用いて $(*)$ を示せ．

$\boxed{2}$ 以下の問に答えよ．

(1) 関数

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は $x=0$ において連続でないことを示せ．

(2) a を正の実数とし，$0<\varepsilon<1$ に対し

$$D_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \varepsilon \le x^2+y^2 \le 1\}$$

とおく．極限値

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{1}{(x^2+y^2)^a}\,dxdy$$

を求めよ．

$\boxed{3}$ V, W を体 K 上の有限次元ベクトル空間とし, V から W への線形写像 T を考える. T の核空間, 像空間をそれぞれ $\mathrm{Ker}\,T$, $\mathrm{Im}\,T$ とおく. 次元定理

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\,T + \dim \mathrm{Im}\,T$$

が成り立つことを確かめるために, V, $\mathrm{Ker}\,T$ の次元をそれぞれ m, r とし, $\{v_1, \ldots, v_r\}$ を $\mathrm{Ker}\,T$ の基底とする. このとき, 命題

(∗)　「$\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_m\}$ が V の基底となるような V の元 $v_{r+1}, \ldots, v_m$ が存在する」

が成り立つ. 以下の問に答えよ.

(1) $\{T(v_{r+1}), \ldots, T(v_m)\}$ が 一次独立であることを示せ.

(2) $\mathrm{Im}\,T$ の任意の元が $T(v_{r+1}), \ldots, T(v_m)$ の一次結合として表せることを示せ.

(3) $m = r + 2$ のとき, 命題 (∗) における v_{r+1} と v_{r+2} の存在を証明せよ.

$\boxed{4}$ 複素 n 次正方行列 A を考える. 複素数 λ が A の固有値であるとは, 0 でない $v \in \mathbb{C}^n$ が存在し, $Av = \lambda v$ をみたすこととする. また, このとき v を λ に対する A の固有ベクトルとよぶ. 以下の問に答えよ.

(1) λ_1, λ_2 を A の異なる固有値とし, v_1, v_2 をそれぞれ λ_1, λ_2 に対する A の固有ベクトルとする. このとき, v_1, v_2 は一次独立であることを示せ.

(2) 行列 A が対角化可能, つまり, 正則行列 P と $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{C}$ が存在し,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & \text{\Large 0} & \\ & & \ddots & & \\ & \text{\Large 0} & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となると仮定する. このとき, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は A の固有値であること示せ. また,

(∗)　λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ に対する固有ベクトル v_i $(i = 1, \ldots, n)$ を適当にとると $\{v_1, \ldots, v_n\}$ は $\mathbb{C}^n$ の基底をなす

ことの理由を簡潔に述べよ.

(3) 対角化不可能な 2 次正方行列の例をあげ, 対角化不可能である理由を (∗) に関連づけて述べよ.