2002 年度予備テスト
第 1 回 2002.7.31

1. 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙で良く練ってから答案を書くこと.

2. あなたが正確に理解をしていることを示してもらうのがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け論証の要点を的確に記すこと. また解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.

3. もし途中に解けない小問があっても後続の小問を解いて構わない.

4. 各問３点満点、計１２点満点とし、合格点は９点である.

$\boxed{1}$ V, W を体 K 上の有限次元ベクトル空間, $\varphi : V \to W$ を線形写像とする. このとき

$$(\star) \qquad \dim V = \dim \operatorname{Im}\varphi + \dim \operatorname{Ker}\varphi$$

が成り立つことを以下の手順で証明せよ.

- $b_1, \ldots, b_m$ は $\operatorname{Im}\varphi$ の基底
- $a_1, \ldots, a_m \in V$ は $\varphi(a_i) = b_i$ をみたす.
- $d_1, \ldots, d_n$ は $\operatorname{Ker}\varphi$ の基底

とするとき

(1) $a_1, \ldots, a_m, d_1, \ldots, d_n$ は線形独立であることを示せ.

(2) V の任意の元 v は $a_1, \ldots, a_m, d_1, \ldots, d_n$ の線形結合で表されることを示せ. (ヒント: はじめに $\varphi(v)$ を $b_1, \ldots, b_m$ で表す.)

(3) 式 $(\star)$ を示せ.

$\boxed{2}$ 3 次複素正方行列 A はちょうど二つの異なる固有値 λ_1, λ_2 を持つとする. A の固有値 λ_1, λ_2 の固有空間をそれぞれ V_1, V_2 とする. すなわち

$$V_i = \{v \in \mathbb{C}^3 \mid Av = \lambda_i v\}$$

とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 部分空間の和 $V_1 + V_2$ は直和 $V_1 \oplus V_2$ となることを示せ.

(2) $\mathbb{C}^3 \neq V_1 \oplus V_2$ となる行列 A の例を一つ挙げ, それについて V_1, V_2 の基底を一つ求めよ. ただし, λ_1, λ_2 は自分で適当に選んで良い. (ヒント：ジョルダン細胞 (Jordan block))

(3) (2) の行列は対角化できない. その理由を「行列 A の対角化と $\mathbb{C}^3$ の基底の関係」の観点より簡潔に説明せよ.

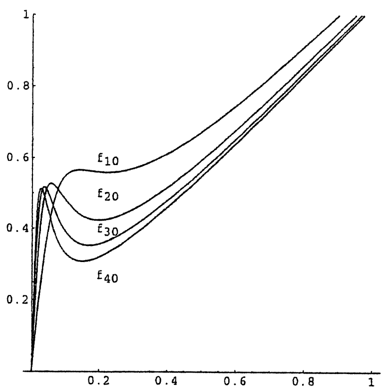

図 1. 問3の関数 f_n $(n=10,20,30,40)$ のグラフの概形

$\boxed{3}$ 各自然数 n に対して閉区間 $[0,1]$ 上の関数 f_n を

$$f_n(x) = \frac{nx(1+nx^2)}{1+n^2x^2} \quad (0 \le x \le 1)$$

によって定める (図 1 参照). 以下の問に答えよ.

(1) 関数列 $\{f_n \mid n=1,2,\dots\}$ の極限関数 f を求めよ. 次に

$$\lim_{n\to\infty}\left(f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

を求めよ.

(2) 関数列 $\{f_n \mid n=1,2,\dots\}$ が f に $[0,1]$ 上で一様収束しないことを,「一様収束の ε-N 式の定義」に基づいて示せ.

$\boxed{4}$ (1) 2 変数 x, y の微分可能な関数 $f(x,y)$ に対して $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とおく. ただし, $(x,y) \ne (0,0)$ とする. このとき,

$$(x-y)\frac{\partial f}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial f}{\partial y} = r\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial \theta}$$

を示せ.

(2)

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$$

とし, $D \setminus \{(0,0)\}$ 上の関数

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \log\sqrt{x^2+y^2}$$

に対して,

$$h(x,y) = (x-y)\frac{\partial f}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

とする. 広義積分

$$\iint_{D\setminus\{(0,0)\}} h(x,y)\ dxdy$$

を計算し, その値が $\dfrac{1}{2}$ であることを示せ.