4　研究の概要

4－1　研究の目的、必要性

本拠点の研究分野は、純粋数学の中から整数論、表現論、幾何学の三分野、それに数理物理学を加えた４分野からなる。したがって、以下数学という場合はこの広い意味の数学である。

現在、数学では全く出自の違う量・関数の間の等式が発見的に見いだされており、その説明が極めて重要な問題・予想として提示されている。具体的には以下の二つである：

1. 整数論的なゼータ関数と保型形式のゼータ関数を結ぶ等式
2. 二つの場の理論の分配関数間の等式

1 は１９５０年代の谷山豊、志村五郎などの先駆的業績から生まれ、ラングランズ予想と言われるが、整数論と表現論におけるもっとも基礎的な問題である。2 は１９８０年代に生まれたミラー対称性予想といわれるものであり、数理物理学と幾何学に関係する。双方とも全く異なる二つの世界を結ぶ等式であると考えられている。この各々の予想の解明も極めて重要であり、２１世紀においても challenging な問題であるが、さらに興味深いことは、上記の予想が提示する等式達は形式的によく似ており、背後により深い統一的構造や、共通言語が存在することを予期させる点にある。

本拠点の研究面での目的は、この二つの重要問題の解明をすすめることにより理解を深め、背後にある概念、共通言語の発見を目指すことである。

より詳しく述べると、ラングランズ予想は、表現論と整数論を結びつけるものとして定式化された。ラングランズ関手性という自然な形での異なった群の表現論の間の関係が予想され、その予想が解決されれば、アルティン予想といった、整数論における未解決予想が従うことが示された。また、ラングランズ予想自体、表現論においては、さまざまな体の上で定義された群のユニタリ表現の分類の定式化にとって重要なインプットとなった。このことから、１９８０年代から、表現論の研究における一つの指導原理となった。本拠点には表現論のスタッフが参加しており、その研究はラングランズ予想に着想を得たものが多い。例えば、ルスティックにより定式化された有限体上の簡約群に対する

ラングランズ型の予想は、本拠点メンバーである庄司が解決している。このようにラングランズ予想の解決に向け、数学は着実に進歩しているが、その中でも本拠点の研究者は幾何学的方法により整数論、表現論双方で世界的に重要な貢献をおこなっている。しかしながら高度な技術が必要になっていることもあり、新たな視点による別方向のアプローチや簡易化が待たれている。ここに数理物理学をも含めた、分野を超えた研究を行う価値が見出される。ミラー対称性予想については９０年代に数学的解明が進み、予想が成立する様々な具体例が発見されたが、現在、ホモトピー論的観点からの定式化が進んでおり、古典的なフーリエ変換との関連が意識されるに至っている。本拠点メンバーの貢献も大きい。自然界における新たな対称性の発見・確立はそれ自身人類にとっての大きな知的資産であるが、本計画ではラングランズ予想との関連を含めその対称性が成立する内在的な理由を追及しており、それによって新たな空間概念の発見など、過去にない幾何学的描像が生まれることを期待している。

４－２　研究経過と成果

大別すると、整数論・表現論グループおよび、幾何学・数理物理学グループの二つのグループにわかれて研究活動をおこなった。研究テーマは、「数、対称性、空間概念」に関連するのであるが、それらのアプローチが密接に関係し合っているのが本拠点の特徴である。これらの交流は、本研究科における自由闊達な雰囲気と、拠点形成活動として行ったセミナーシリーズ、教育研究プロジェクトといった（主として）教員側の活動と、この活動の間のリンクとなった大学院学生の活動、特にミニプロジェクトを通した活動によるところが大きいことは特筆に値すると考える。

以下、概ねグループ分けに添った形で研究経過について述べる。

数論・表現論グループの共通のテーマは、整数環上に定義された対象を通しての数論・対称性の研究である。数論幾何においては、p-進体上のリジッド幾何とミラー対称性の間の関連が藤原によって見いだされた。また、高次類体論は、準安定族にまで拡張された。

表現論においては、重要な役割をはたすコンパクト化が整数環上定義され、解析的な道具立ての数論幾何への移植が宇澤らによって進展した。

保型表現の理論においてはさまざまな体の上の概均質ベクトル空間の b-関数の理論が重要な役割を果たすが、そのために整数環上の大局的な対象としての研究が行者によって強力に進められている。ここで見いだされたレフシェッツ原理は本プロジェクトにとっても重要な観点を提供するものと思われる。

代数群の概念の拡張も現在進行中である。一つには、ワイル群の拡張である複素鏡映群である。表現論の立場からは庄司らの研究が進行中であり、ワイル群の場合に知られている重要な概念・結果の移植が進んでいる。ホモトピー論の立場からは、エキゾチックな H-空間をモチビックホモトピーの圏の中で実現するプロジェクトが開始された。

平成１５年１１月の COE コンファレンスにおいても数論と数理物理学における新たな可能性が見出された。藤原が以前から研究を進めてきた、数論幾何におけるリジッド幾何学と、当プロジェクトでの重要課題であるミラー対称性予想との関連である。コンセビッチ、深谷賢治（京都大学）の観察によると、シンプレクティック多様体から生じる基本的な量がリジッド幾何学で意味を持ち、ミラーパートナーを決定することができる可能性がある。

土屋は、永友、松尾との共同研究において、頂点作用素代数に付随したリーマン面上の共形場理論の研究を行った。特に Frenkel-Zhu による C_2 条件を用いた頂点作用素の表現論の整備を行い、種数 0 の N 点付き安定曲線のモジュライ空間上に共形ブロックの層で境界に沿って確定特異点型の D_X 加群の構造を持つものを構成した。

幾何・数理物理グループの研究テーマは大きく二つにわかれる。共通のテーマとしてはミラー対称性があるが、その根底にある課題は空間概念の見直しである。空間概念の見直しの一つとして、空間概念の数論化、組み合わせ論化が進展した。一例としては、ネバンリンナ・カルタン理論の類似をディオファンタス近似の中で追求するプログラムがある。本拠点では小林が中心となって研究を展開している。ネヴァンリンナ・カルタン理論は一般の位置にある超平面配置の全正則曲線による近似理論である。そのディオファントス類似は、数体 k 上定義された射影空間内の代数的に定義された超平面配置の k-有理点による近似理論である。小林はネヴァンリンナ・カルタン理論の枠組みをヴォイタの辞書によりディオファントス近似の設定に翻訳した。

組み合わせ論的に空間を見ることは、空間のアデール化とも関連し、重要な視点である。この点については、納谷らによる超剛性の拡張が重要であり、p-進群に対して威力を発揮した道具が自然な形で拡張された。

通常の剛性についても金井は次の結果を得た。実階数 r が 2 より大きい非コンパクト半単純リー群およびその一様格子が与えられたとき，それらに付随して r 次元実ベクトル空間 の アノソフ的作用が標準的な仕方で構成され、その作用の「無限小」剛性を示した。方法は「変形」を統制するコホモロジーの消

滅を示すのであるが、この無限小剛性の定式化に現れるコホモロジーは，葉層化多様体の「接」コホモロジーであり、これを多様体の「通常の」コホモロジーと関係づけ、後者に対しヴェイユや松島による古典的な消滅定理を適用するものである。

ラグランジュ部分多様体 L に付随したフィルター付き A_∞ 代数を用いたフレアーコホモロジーの障害理論と変形理論は幾何においても、数理物理学においても重要な役割を果たす。太田らは、物理学の文脈で現れる超ポテンシャル関数を A_∞ 代数の枠組みで捉えることにより、低次元のトーリックファノ多様体のトーラスファイバーに対してこのポテンシャル関数が、物理学におけるランダウ・ギンズブルグ模型の A 型アフィン戸田スーパーポテンシャル関数と一致することを見いだした。この結果は更に、Cho-Oh により一般のトーリックファノ多様体のトーラスファイバーの場合に拡張された。これは物理的議論による堀-バッファの予見を数学的に解明したことを意味している。

代数多様体のモジュライ空間の研究は、空間概念の見直しにとっても極めて重要である。空間概念を拡張する際に、空間の点が、点という以上により多くの情報を持っている場合の一つの例となっているためである。金銅は、射影平面の点に関連した Del Pezzo 曲面のモジュライ空間が complex ball による uniformization を持つことを示した. ここでは Del Pezzo 曲面と、特別な自己同型を持つ K３曲面との間の自然な対応関係を見いだし、K３曲面の周期の理論を用いることで、 Del Pezzo 曲面のモジュライ空間が complex ball の算術的部分群による商空間として記述できることを示した。K３曲面とその自己同型の組を用いたモジュライ空間の記述の方法は、整数環上の格子のかわりに Gauss 整数環や Eisenstein 整数環上の格子理論を用いるもので、アーベル多様体と自己準同型環の組を考える志村氏の方法のK３版ともいえる。

上に述べた complex ball はある IV 型有界対称領域に自然に埋め込まれており、IV 型領域上の保型形式を制限することでモジュライ空間の射影モデルの構成が可能になる。ここでは射影直線の８点のモジュライが５次元の複素ボールの算術商であることを示し、cross ratio を用いたこのモジュライの射影モデルが保型形式を用いても表せることを示した。一方、K３曲面の自己同型群を階数２４の特別な格子である Leech 格子の理論を用いて調べてきた. 特にまだ

あまり知られていない正標数の代数的閉体上定義された超特異 K３曲面の自己同型について調べた。次数 23 の Mathieu 群の極大部分群は全てある超特異 K３曲面に自己同型として作用することを示し、散在型の有限単純群と、幾何の間の関連を深く示唆する結果を得た。この結果は、散在型の有限単純群の代数群としての定義体の存在を示唆するものと考えられる。

幾何、数理物理学、表現論の接点にある分野として、特殊関数論がある。現在では、パンルベ方程式も射程にはいっており、盛んに研究されている。梅村は、彼自身が創始した無限次元微分 Galois 理論を用いて、パンルベ方程式に関連する興味ある例をいくつか作った。梅村は忘れられていたが重要な無限次元微分ガロア理論に注目し、Vessiot の 20 世紀半ばの論文にある思想を出発点としてまったく新しい視点からの無限次元微分ガロア理論を提唱したのであり、50 年以上放置されていた研究分野をよみがえらせたと言える。

数理物理グループでは、次のような新しい知見が得られた。素粒子の統一理論として確立している標準模型の力学は、ゲージ場の量子論で数学的に記述されるが、ゲージ場の量子論と重力の古典論である一般相対性理論を融合しようとする試みとして超対称性と弦理論が精力的に研究されてきた。超対称性や弦理論の力学には、ミラー対称性をはじめとする各種の双対性が存在し，数学的に非常に興味深い研究対象となっている。

1995 年以降、弦理論の双対性を追求することによって、M 理論と呼ばれる仮想的な理論の存在が強く示唆されており、この M 理論と４次元および３次元の超対称性をつなぐものとして例外型のホロノミー群 G_2 と Spin(7) をもつ多様体が重要である。菅野浩明らは、これら例外型ホロノミーを持つ計量の上で M 理論を展開するための準備をおこなった。また、栗田は、超弦理論の根本にある数理的基本構造を解析する事を目的として研究を行い、以下の様な成果を得た。まず、5 次元超対称ヤンミルズ理論の解析を行い、自己双対とは限らない一般の定重力場と結合した場合の分配関数、いわゆるネクラソフの公式は、位相的弦理論における一般のゴパ・クマー・ヴァファ不変量の母関数でもある事を見いだした。又、この一般のネクラソフの公式の位相的頂点作用素による構成を、三角型ライセナース模型の励起状態であるマクドナルド関数を用いて与えた。ネクラソフの公式は、分配関数をヤング図に関する足し上げとして表

したものであり、その足し上げを実際に実行するのは非常に困難であったが、このマクドナルド多項式による表現を用いればそれは可能であり、q-ドゥンクル演算子という差分作用素を用いて表されることを見いだした。