2025 年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

2 日目

2024 年 7 月 28 日　9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて**4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ **の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること**．
4. 答案用紙は**4 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない**．
5. 答案用紙は，**1 枚目が $\boxed{1}$ 用，2 枚目が $\boxed{2}$ 用，3 枚目が $\boxed{3}$ 用，4 枚目が $\boxed{4}$ 用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること**．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 N 次複素正方行列 A, B について，$A^n = E$ が成立し，B^n は対角化可能であるとする．ただし，n は正の整数，E は N 次単位行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\omega = \exp\left(\dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{n}\right)$ とおく．$\mathbb{C}^N$ のベクトル $\boldsymbol{v}$ と $i = 0, \ldots, n-1$ に対し，

$$\boldsymbol{v}_i := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{ij}A^j\boldsymbol{v}$$

とおく．このとき $\boldsymbol{v}_i$ は零ベクトルまたは A の固有ベクトルであることを示せ．

(2) (1) の $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ に対し

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \cdots + \boldsymbol{v}_{n-1}$$

であることを示せ．さらに，A は対角化可能であることを示せ．

(3) λ を B^n の固有値，V_λ を λ に対する B^n の固有空間とする．このとき，$\boldsymbol{v} \in V_\lambda$ ならば $B\boldsymbol{v} \in V_\lambda$ であることを示せ．

(4) B が正則であるとき，B も対角化可能であることを示せ．

2 以下の問いに答えよ.

(1) $0 < x < \dfrac{1}{2}$ となる実数 x に対し, $x < -\log(1-x) < (2\log 2)x$ が成立することを示せ.

(2) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ を $0 < a_n < 1$ となる実数列とする. このとき,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n) := \lim_{n\to\infty}(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n)$$

が正の実数に収束するのは, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき, かつそのときに限ることを示せ.

(3) $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ を $0 < b_n < 1$ となる実数列であって, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-b_n)$ が収束するものとする. このとき,

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{b_n - x}{1 - b_n x}$$

が $[0,1)$ 上広義一様収束することを示せ. また $f(x) = 0$ となる $(0,1)$ 上の点 x をすべて求めよ.

3 複素平面 $\mathbb{C}$ から原点および負の実軸を除いてできる領域を D とし, D における $\log z$ の分枝を正の実軸上で実数値をとるように定めることで, $\log z$ を D 上で定められた一価関数とみる. 以下の問に答えよ.

(1) $0 < \alpha < 2$ として, 複素関数 f を

$$f(z) = \frac{\log(2 + \alpha z)}{z}$$

と定める. また,

$$C = \{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

とおき, 複素平面内の閉曲線 C に C で囲まれる内部を左手に見て進む向きを定める. このとき, $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を求めよ.

(2) D における $\log z$ の分枝の選び方にもとづき, (1) で定めた閉曲線 C 上の点 z, w に対して

$$\log\left(4 + 2\alpha(z + w) + \alpha^2 zw\right) = \log(2 + \alpha z) + \log(2 + \alpha w)$$

が成立することを示せ.

(3) 積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \log\left(4 + \alpha^2 + 4\alpha\cos\theta\right)\,d\theta$ の値を求めよ.

4 数直線 $\mathbb{R}$ に含まれる 2 つの開区間の和 $A = (-2,0) \cup (0,2)$ に属する点 a, b に対し,

(i) $b = a$

(ii) $a \neq \pm 1$ かつ $b = -a$

のいずれかが成り立つときに $a \sim b$ と記すことにする.

(1) これは同値関係であることを示せ.

(2) $a \in A$ に対し $[a] = \{b \in A \mid a \sim b\}$ は a の同値類と呼ばれる．同値類の集合 $X = A/\sim = \{[a] \mid a \in A\}$ と射影写像 $p : A \to X; a \mapsto [a]$ をとる．X の部分集合 U について $p^{-1}(U)$ が開集合のとき U が開集合であると定めることにより, X に位相を導入する．このとき $(0,2)$ の p による像 $p((0,2))$ は X の開集合でありかつ $(0,2)$ と同相であることを示せ.

(3) X はハウスドルフ空間かどうか調べよ.

（2024 年 7 月 28 日）　（以上）