2025 年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

1 日目

2024 年 7 月 27 日　9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて**4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ **の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること**．
4. 答案用紙は**4 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない**．
5. 答案用紙は，**1 枚目が $\boxed{1}$ 用，2 枚目が $\boxed{2}$ 用，3 枚目が $\boxed{3}$ 用，4 枚目が $\boxed{4}$ 用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること**．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対し, $V = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 \mid A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\}$ とおく. また, 実数 t に対して, ベクトル $\begin{pmatrix} t \\ -t+1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ t+1 \\ -t+1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の生成する $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W_t とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $V + W_t = \mathbb{R}^4$ となるための t についての必要十分条件を求めよ.

(2) $V + W_t \neq \mathbb{R}^4$ であるとき, $V \cap W_t$ の基底を一組求めよ. また, このときの $\mathbb{R}^4$ における $V + W_t$ の直交補空間の基底を一組求めよ. ただし, 直交補空間は $\mathbb{R}^4$ における標準内積により定まるものとする.

(3) $t = 3$ であるとき, ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を V のベクトルと W_3 のベクトルの和として表せ.

2 a を実数とし, 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 2a-1 \end{pmatrix}$$

で定める. 以下の問いに答えよ.

(1) A が対角化可能となるための a についての必要十分条件を求めよ.

(2) 重複を除いて A の固有値の数が 2 つのとき, A のジョルダン標準形を求め, $P^{-1}AP$ が求めたジョルダン標準形となる正則行列 P を 1 つ求めよ.

(3) A が対角化可能でないとき, A の n 乗 A^n を求めよ. ただし, n は正の整数とする.

3 以下の問いに答えよ.

(1) $a > 0$ に対し, 無限和

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a \log n}$$

の収束・発散を判定せよ.

(2) $\mathbb{R}^2$ 上定義された 2 変数関数 $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{x+y}$ の極値をすべて求めよ.

(3) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$ とする. このとき, 重積分

$$\iint_D x \log(x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

の値を求めよ.

4 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を次で定める：

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{x}\right) & (x < 0) \\ 0 & (x \geq 0) \end{cases}.$$

n は正の整数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $x < 0$ における $f(x)$ の導関数を求めよ．

(2) $x = 0$ において $f(x)$ が微分可能であることを示せ．

(3) $x < 0$ における $f(x)$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ は，ある $(n-1)$ 次多項式 $p_{n-1}(x)$ によって

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_{n-1}(x)}{x^{2n}} f(x)$$

と表されることを示せ．

(4) 関数 $f(x)$ の $x = 0$ における n 次微分係数 $f^{(n)}(0)$ が存在すればそれを求めよ．また関数 $f(x)$ が $x = 0$ でテイラー展開可能かどうかも決定せよ．