2024年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

2日目

2024 年 2 月 4 日　9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて**4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$ ， $\boxed{2}$ ， $\boxed{3}$ ， $\boxed{4}$ **の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること**．
4. 答案用紙は**4 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない**．
5. 答案用紙は，**1 枚目が** $\boxed{1}$ **用，2 枚目が** $\boxed{2}$ **用，3 枚目が** $\boxed{3}$ **用，4 枚目が** $\boxed{4}$ **用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること**．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

　問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 V を実内積空間とし, $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対して V 上の内積を $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ で表す. 与えられたベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ に対して, $a_{ij} = \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle$ により実数 a_{ij} および n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ を定める. 以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i, \qquad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} y_i \boldsymbol{v}_i$$

とおく. このとき, 内積 $\langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}) \rangle$ を $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ および a_{ij} によって表せ.

(2) A の固有値はすべて 0 以上の実数であることを示せ.

(3) A が正則であることと $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立であることは同値であることを示せ.

(4) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ で生成される部分空間の次元は A の階数に等しいことを示せ.

2 $\mathbb{R}^3$ の点を $x = (x_1, x_2, x_3)$ で表し，$x \in \mathbb{R}^3$ のノルムを $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{3} x_k^2\right)^{1/2}$ と定める．$\mathbb{R}$ の区間 $[0, \infty)$ 上で定義された連続な正値関数 $g(r)$ のうちで，$g(r)r^2$ が $[0, \infty)$ 上で広義積分可能で

$$\int_0^\infty g(r) r^2 \, dr = \frac{1}{4\pi}$$

となるものを一つ固定する．この $g(r)$ を用いて $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$ 上の関数 $G(x, t)$ を

$$G(x, t) = t^{-3} g\left(\frac{\|x\|}{t}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0)$$

で定める．以下の問に答えよ．

(1) 任意の $t > 0$ に対して $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} G(x, t)\, dx = 1$ が成り立つことを示せ．

(2) 任意の $\delta > 0$ に対して $\displaystyle\lim_{t \to 0} \int_{\|x\| \geq \delta} G(x, t)\, dx = 0$ が成り立つことを示せ．

(3) $\mathbb{R}^3$ 上で有界かつ一様連続な関数 $f(x)$ に対して

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} G(y, t) f(x - y)\, dy \qquad (x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0)$$

が $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$ 上の有界かつ一様連続な関数として定められることを示せ．

(4) $\mathbb{R}^3$ 上で有界かつ一様連続な関数 $f(x)$ に対して問 (3) で定められた関数 $u(x, t)$ は $t \to 0$ のとき $f(x)$ に $\mathbb{R}^3$ 上で一様収束することを示せ．

3 複素関数 f を $f(z) = \dfrac{e^{iz} - 1}{z}$ で定める．また, $R > 0$ に対して

$$C_1 = \{x \mid x \in [0, R]\}, \quad C_2 = \{iy \mid y \in [0, R]\}, \quad C_3 = \left\{ Re^{i\theta} \;\middle|\; \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\}$$

とし, 閉曲線 $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ に C で囲まれる内部を左手に見て進む向きを定める．以下の問に答えよ．

(1) f は $\mathbb{C}$ 上の正則関数に拡張されることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{R \to \infty} \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin\theta}\, d\theta = 0$ を示せ．

(3) f の C 上での複素積分を考えることにより, 実関数の広義積分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

の値を求めよ．

4 X を位相空間とする．部分集合 $A \subset X$ が X の連結集合であるとは，X の開集合 U, V で

$$U \cap A \neq \emptyset, \quad V \cap A \neq \emptyset, \quad A \subset U \cup V, \quad U \cap V \cap A = \emptyset$$

となるものが存在しないことをいう．ただし，$\emptyset$ は空集合を表す．以下の問に答えよ．

(1) Y を位相空間とし，$f : X \to Y$ を連続写像とする．A を X の連結集合とするとき，$f(A)$ は Y の連結集合であることを示せ．

(2) A を X の連結集合とするとき，その閉包 $\overline{A}$ も X の連結集合であることを示せ．

(3) Λ を添字の集合とし，$(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を X の連結集合の族とする．$\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ が空でないとき，$\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ も X の連結集合になることを示せ．