2024年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

1日目

2024 年 2 月 3 日　9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ **の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること**．
4. 答案用紙は **4 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない**．
5. 答案用紙は，**1 枚目が $\boxed{1}$ 用，2 枚目が $\boxed{2}$ 用，3 枚目が $\boxed{3}$ 用，4 枚目が $\boxed{4}$ 用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること**．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 12 & 24 & -9 \end{pmatrix}$$

で定める. 以下の問に答えよ.

(1) A, B はそれぞれ対角化可能であることを示せ.

(2) A, B は共通の正則行列 P によって対角化可能であることを示し, その正則行列 P を求めよ.

2 t を実数とする. $\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -t+1 \\ t+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で生成される部分空間を V_1 とし, $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{d}$ で生成される部分空間を V_2 とする. 以下の問に答えよ.

(1) V_1, V_2 の次元をそれぞれ求めよ.

(2) $V_1 \cap V_2 \neq \{\boldsymbol{0}\}$ であるとき, t の値を求めよ.

(3) 問 (2) で求めた t に対して, $V_1 \cap V_2$ の基底を一組求めよ.

(4) 問 (2) で求めた t に対して, $\mathbb{R}^4$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ であって条件

(i) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は V_1 の基底　　(ii) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3\}$ は V_2 の基底

をともにみたすものが存在することを示し, そのような基底を一組求めよ. ただし, $\mathbb{R}^4$ には標準内積が与えられているものとする.

3 以下の問に答えよ.

(1) 積分 $\displaystyle\int_0^{0.1} e^{-x^2}dx$ の値について, その小数第 5 位を四捨五入して小数第 4 位まで求めよ.

(2) 広義積分

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{\sin x}}{(\sin x + x)^{\alpha}(1+x^{\beta})}\,dx$$

が収束するための $\alpha, \beta > 0$ に対する必要十分条件を求めよ.

4 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は

$$a_n > 0, \qquad b_n > 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

をみたす数列とする．以下の問に答えよ．

(1) ある正の整数 N が存在して任意の $n \geq N$ に対して

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

が成り立つとする．このとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するならば級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束することを示せ．

(2) $s > 0$ とする．$b_n = n^{-s}$ に対して，極限値

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{b_{n+1}}{b_n} - 1\right)$$

を求めよ．

(3) 有限な極限値

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = \alpha$$

が存在するとき，$\alpha < -1$ ならば級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束することを示せ．ただし，問 (2) の b_n に対して s の値による級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ の収束と発散については，証明をせずに用いてよい．