

**2021年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第2次募集）**

1日目

2021年2月6日 10:00～12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を除いて**3枚1組**である。試験開始後に各自確認すること。乱丁、落丁、印刷不鮮明な箇所などがあれば、ただちに監督者に申し出ること。
3. 問題は全部で**3題**ある。**①**、**②**、**③**の**3題**すべてに日本語または英語で解答すること。
4. 答案用紙は**3枚1組**である。各自確認すること。ホッチキスを外してはならない。
5. 答案用紙は、1枚目が**①**用、2枚目が**②**用、3枚目が**③**用となっている。間違えないこと。
6. すべての答案用紙の所定の欄に、受験番号と氏名を記入すること。
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが、その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること。
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合、あるいは計算用紙が足りなくなった場合は、監督者に申し出ること。
9. 試験終了後に提出するものは、**3枚1組の答案用紙**である。この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい。

記号について：

問題中の \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} はそれぞれ整数, 有理数, 実数, 複素数全体のなす集合を表す。

1 a, b を実数とする. 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} -b & b+1 & a \\ -2b & 2b+1 & a \\ -b-1 & b+1 & a+1 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問に答えよ.

(1) A の固有値で, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$ という形の固有ベクトル (ただし, t は実数とする) をも

つものをすべて求めよ.

(2) A の固有値をすべて求めよ.

(3) $b = 1$ の場合に, 固有値 1 に対する固有空間の次元を求めよ.

(4) A が対角化不可能であるために a, b がみたすべき必要十分条件を求めよ.

2 以下の問に答えよ.

(1) 広義積分

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$

が収束することを示せ.

(2) \mathbb{R}^2 上で定義された 2 変数関数 $f(x, y) = x^2 - y^4 - (x + y)^4$ の極値をすべて求めよ.

(3) $a > 0$ とする. 次の積分値を求めよ.

$$\int_0^a \left(\int_y^{\sqrt{2a^2 - y^2}} e^{x^2 + y^2} dx \right) dy$$

3 広義積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1} dx$$

を考える。以下の問に答えよ。

- (1) 複素関数 $f(z) = \frac{1}{z^6 + 1}$ の上半平面 $\{z = x + iy \in \mathbb{C}; x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ 内の極とそこでの留数を求めよ。
- (2) 留数定理を用いて I の値を求めよ。