2017年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第 2 次募集）

午前の部

2017 年 2 月 7 日 9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$，$\boxed{\mathbf{2}}$，$\boxed{\mathbf{3}}$，$\boxed{\mathbf{4}}$ の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：
問題中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 実数を係数とする x について 3 次以下の多項式全体のなす実線形空間を V とする．α を実数とし，$f(x) \in V$ に対し，

$$\Psi(f(x)) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - 1}$$

とおく．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 任意の $f(x) \in V$ に対し，$\Psi(f(x)) \in V$ となるための，α に関する必要十分条件を求めよ．このとき，Ψ は V から V への線形写像を定めることを示せ．

以下，α は (1) の条件をみたすとする．さらに，β を実数とし，次式で定まる V から V への線形写像 Φ を考える．

$$\Phi(f(x)) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - 1} + \beta\bigl(f'(x) - f'(0)\bigr) - \frac{\beta}{6}\bigl(f''(x) - f''(1)\bigr)(x - 1).$$

ただし，$f'(x), f''(x)$ はそれぞれ $f(x)$ の 1 回微分，２回微分を表す．

(2) V の基底 $\{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\}$ に関する Φ の表現行列を求めよ．

(3) 写像 Φ の核の次元を求めよ．

2 a を複素数とし，3 次複素正方行列

$$A = \begin{pmatrix} -a & a+2 & -3a-4 \\ -a+1 & a+1 & -3a+2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

を考える．このとき，以下の問に答えよ．

(1) A の固有値および固有空間を求めよ．

(2) A の最小多項式を求めよ．

(3) $a=0$ とする．3 次元複素線形空間 $\mathbb{C}^3$ のベクトル

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

が，$\mathbb{C}^3$ のベクトル $\vec{y}$ を用いて

$$\vec{x} = (A-2E)\vec{y}$$

と表すことができるための，p, q, r に関する必要十分条件を求めよ．ただし，E は単位行列を表す．

3 以下の問に答えよ．(1), (2), (3) は独立な問題である．

(1) $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上で微分可能な関数とし，$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ とする．任意の $t \in (0,1)$ に対し

$$a\frac{\partial f}{\partial x}(ta, tb) + b\frac{\partial f}{\partial y}(ta, tb) \geq 0$$

が成り立つならば，$f(a,b) \geq f(0,0)$ であることを示せ．

(2) 次の広義積分が収束する実数 α の範囲を求めよ．

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^\alpha}\,dx.$$

(3) $f_0(x)$ は $[a,b]$ で連続とし，

$$f_n(x) = \int_a^x f_{n-1}(y)\,dy, \quad x \in [a,b], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

により帰納的に関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x), \ldots$ を定める．以下の問に答えよ．

(i) $f_2(x) = \displaystyle\int_a^x f_0(z)(x-z)dz$ を示せ．

(ii) 任意の $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対し，

$$|f_n(x)| \leq \frac{(b-a)^n}{n!} \max_{a \leq x \leq b} |f_0(x)|$$

が成り立つことを示せ．

4 φ は $\mathbb{R}$ 上で定義された C^1 級関数で, $\varphi(0) > 0$ かつ $|x| > 1$ のとき $\varphi(x) = 0$ をみたすものとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $f(x,t) = \varphi(x-t)$ であるとき，$\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial x}$ を計算せよ．

(2) $n = 1, 2, \ldots$ に対し $g_n(x) = \varphi(x-n)$ により関数列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定める．$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ の各点収束極限 g を求めよ．また, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ は g に $\mathbb{R}$ 上一様収束するかどうか, 理由とともに答えよ．

ただし，$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が g に $\mathbb{R}$ で各点収束するとは, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$$

が成り立つこと，$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が g に $\mathbb{R}$ で一様収束するとは

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| = 0$$

が成り立つことをいう．

(3) $n = 1, 2, \ldots$ に対し $h_n(x) = \varphi(x - \frac{1}{n})$ により関数列 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定める．$\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ の各点収束極限 h を求めよ．また, $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ は h に $\mathbb{R}$ 上一様収束するかどうか, 理由とともに答えよ．