2016年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午前の部

2015 年 7 月 25 日（土）9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の **4** 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 以下の問に答えよ．

(1) p, q, r を実数とする． 次の連立一次方程式

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_4 & = 1, \\ 2x_1 - 4x_2 - (r^2 + r - 2)x_3 - 2x_4 & = 3p - 3q + 2, \\ (2-3p)x_1 - (4-6p)x_2 + (3p+r)x_4 & = 2 \end{cases}$$

をみたす

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

を求めよ．

(2) s を実数として，3 つのベクトル

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}$$

が生成する $\mathbb{R}^4$ 内の部分ベクトル空間を V とする．また，$q = r = 0, p \neq 0$ に対して，(1) のベクトル $\vec{x}$ 全体のなす集合を W とおく．このとき，$V \cap W \neq \emptyset$ となる s を求めよ．

2 変数 x の高々 n 次の複素係数多項式全体のなす $\mathbb{C}$ 上の $n+1$ 次元ベクトル空間を P_n とする．線形写像 $f_n : P_n \to P_n$ を次で定める．

$$f_n : p(x) \mapsto p(x) + p''(x) + p'''(x), \quad p(x) \in P_n.$$

ただし，$p''(x)$ と $p'''(x)$ はそれぞれ $p(x)$ の 2 階および 3 階微分を表す．以下の問に答えよ．

(1) P_4 の基底 $x^4, x^3, x^2, x, 1$ に関する f_4 の表現行列を求めよ．

(2) f_4 の固有値と，各固有値に対する固有空間を求めよ．

(3) f_4 の最小多項式，および f_4 の表現行列の Jordan 標準形を求めよ．（ただし，標準形に変換する正則行列は求めなくてよい．(4) も同様．）

(4) $n \geq 1$ に対して，f_n の表現行列の Jordan 標準形を求めよ．

3 以下の問に答えよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は実数を成分とする直交行列とする．また，$\mathbb{R}^2$ 上で定義された C^2 級の実関数 $u(s,t)$ が $\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ をみたすとする．このとき，

$$v(x,y) = u(ax+by, cx+dy), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

とおくと，$v(x,y)$ は $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ をみたすことを示せ．

(2) 次の実関数

$$f(x) = \int_0^x e^{e^{t+x^2}} dt$$

に対して, 微分の値 $f'(1)$ を求めよ.

(3) 実数 $a > 0$ と整数 $k \geq 1$ に対して，数列

$$c_n = \frac{(1+a)^n}{n^k}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

は $n \to \infty$ のとき発散することを示せ．

4 $\mathbb{R}^3$ の部分集合 V を次で定義する．

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq -z \log z\}.$$

以下の問に答えよ．

(1) $c \in \mathbb{R}$ とする．平面 $z = c$ と V の交わりが空でないための c に関する必要十分条件を求めよ．

(2) $a, b \in \mathbb{R}$ とする．広義積分

$$\int_0^\infty e^{ax} x^b dx$$

が収束するための a, b に関する必要十分条件を求めよ．

(3) $\alpha \in \mathbb{R}$ とする．広義重積分

$$\iiint_V \frac{(x^2 + y^2)^\alpha}{z^2}\, dxdydz$$

が収束するための α に関する必要十分条件を求めよ．