2015年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第 2 次募集）

午後の部

2015 年 2 月 5 日（木）13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{1}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{2}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{3}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{4}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 V を体 K 上の有限次元ベクトル空間，W を V の部分空間とする．V における同値関係 $\sim$ を

$$v_1 \sim v_2 \quad \Longleftrightarrow \quad v_1 - v_2 \in W$$

により定め，同値関係 $\sim$ による商集合を V/W と表す．$v \in V$ を代表元とする V/W の元を記号 $\overline{v}$ で表すとき，V/W における加法とスカラー倍を

$$\overline{v_1} + \overline{v_2} = \overline{v_1 + v_2}, \quad c\overline{v} = \overline{cv}, \quad (v_1, v_2, v \in V,\, c \in K)$$

と定めることにより，V/W は体 K 上のベクトル空間となる．以下の問に答えよ．

(1) V/W における加法とスカラー倍の定義が well-defined である（すなわち代表元の選び方によらない）ことを確かめよ．

(2) $W \neq V$ かつ $W \neq \{0\}$ とする．ここで 0 は零ベクトルを表す．このとき，W の基底 $v_1, \ldots, v_k$ に対して，ある $v_{k+1}, \ldots, v_n \in V$ が存在して，$v_1, \ldots, v_n$ が V の基底になることを示せ．

(3) (2) において，$\overline{v_{k+1}}, \ldots, \overline{v_n}$ は V/W の基底となることを示せ．

2 $\mathbb{R}^3$ における $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ の近傍上の C^1 級関数 $f(x_1, x_2, x_3)$ に対して，$\mathbb{R}^3$ から原点を除いた領域上の関数 $g(u_1, u_2, u_3)$ を

$$g(u_1, u_2, u_3) = f\left(\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}, \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}, \frac{u_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}\right)$$

で定義する．$(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ を S^2 上の任意の点とする．以下の問に答えよ．

(1) 不等式

$$\sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial g}{\partial u_j}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\right)^2 \leq \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\right)^2 \qquad (*)$$

が成立することを示せ．

(2) $r = 1$ の近傍で定義される 1 変数関数

$$F(r) = f(r\omega_1, r\omega_2, r\omega_3)$$

を考える．このとき，不等式 $(*)$ において等号が成立するための必要十分条件は，$F'(1) = 0$ であることを示せ．

3 複素関数 $f(z) = h - \cos z$ を考える．ただし h は非負実数の定数とする．また $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ である．以下の問に答えよ．

(1) $f(z)$ の零点をすべて求めよ．

(2) $f(z)$ の各零点における $\dfrac{1}{f(z)}$ の留数を求めよ．

4 X と Y を位相空間とする．X の閉集合 X_1, X_2 があり，$X = X_1 \cup X_2$ とする．また，写像 $f_1\colon X_1 \longrightarrow Y$, $f_2\colon X_2 \longrightarrow Y$ は連続であり，かつ任意の $x \in X_1 \cap X_2$ に対して $f_1(x) = f_2(x)$ をみたすものとする．ただし，X_1, X_2 の位相は，X に対する相対位相とする．このとき，写像 $F\colon X \longrightarrow Y$ を

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x) & (x \in X_1 \text{ のとき}) \\ f_2(x) & (x \in X_2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定める．以下の問に答えよ．

(1) Y の部分集合 V に対して，$F^{-1}(V) = f_1^{-1}(V) \cup f_2^{-1}(V)$ となることを示せ．

(2) $F\colon X \longrightarrow Y$ は連続写像であることを示せ．

（以上）