2015年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午後の部

2014 年 7 月 26 日（土）13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$ ， $\boxed{\mathbf{2}}$ ， $\boxed{\mathbf{3}}$ ， $\boxed{\mathbf{4}}$ の **4** 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 V を n 次元実ベクトル空間，$(\ ,\ )$ を V 上の内積，$\{a_1, \ldots, a_n\}$ を V の任意の基底とする．

(1) $\{e_1, \ldots, e_n\}$ を V の任意の正規直交基底とする．基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ と基底 $\{a_1, \ldots, a_n\}$ の変換行列を $P = (p_{ij})$ とする．すなわち，

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$$

とする．また，n 次正方行列 $C = (c_{ij})$ を

$$c_{ij} = (a_i, a_j)$$

により定める．このとき，P を用いて C を表せ．さらに $\det C > 0$ を示せ．

(2) V の n 個の元の組 $\{b_1, \ldots, b_n\}$ で

$$(a_i, b_j) = \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} \text{ は Kronecker のデルタ})$$

をみたすものが一意的に存在することを示せ．

(3) (2) の $\{b_1, \ldots, b_n\}$ は V の基底であることを示せ．また，n 次正方行列 $D = (d_{ij})$ を

$$d_{ij} = (b_i, b_j)$$

により定めるとき，

$$\det D = (\det C)^{-1}$$

が成り立つことを示せ．

2 $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数 $\varphi(x,y)$ は

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)\,dxdy = 1, \quad \varphi(x,y) \geq 0$$

をみたしているものとし，実数 $t > 0$ に対して $\varphi_t(x,y) = t^{-2}\varphi(t^{-1}x, t^{-1}y)$ とおく．また，$\mathbb{R}^2$ 上の連続関数 $f(x,y)$ は，ある有界集合 $K \subset \mathbb{R}^2$ の外で常に 0 とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 重積分

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_t(x,y)\,dxdy$$

の値を求めよ．

(2) 実数 $\delta > 0$ に対して，正の側から t が 0 に近づくときの極限

$$\lim_{t\to+0} \iint_{x^2+y^2\geq\delta^2} \varphi_t(x,y)\,dxdy$$

の値を求めよ．

(3) $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上で有界な関数であることの理由を述べよ．

(4) 等式

$$\lim_{t\to+0} \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_t(x,y)f(x,y)\,dxdy = f(0,0)$$

を証明せよ．

3 実数 $R>0$ に対して，複素平面上の半円板

$$D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R,\ \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$$

の境界に反時計回りの向きを入れたものを Γ_R とする．ただし，$\mathrm{Im}\, z$ は z の虚部を表すものとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) Γ_R 上にない $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ に対して，複素積分

$$\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}$$

の値が 0 となるための α, β, γ の条件を求めよ．

(2) 実軸上にない $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ に対して，広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$$

の値が 0 となるための α, β, γ の条件を求めよ．

4 X を位相空間，A をその部分集合とする．A の点 x に対して，$x \in U$ かつ $U \subset A$ をみたす X の開集合 U が存在するとき，x を A の内点という．A に対して，X の部分集合 A°, $A^\times$ を以下のように定める．

A° : A の内点全体の集合,

$A^\times$: A に含まれる全ての開集合の和集合.

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $A^\circ = A^\times$ を示せ．

(2) X の部分集合 $A_1, \ldots, A_n$ に対して，以下を示せ．

$$\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)^\circ = \bigcap_{i=1}^n A_i^\circ.$$

(3) 位相空間 X とその部分集合の無限族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で,

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^\circ = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^\circ$$

が成り立たないものの例を与えよ．