2014年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第 2 次募集）

午前の部

2014 年 2 月 6 日（木）9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある．$\boxed{\mathbf{1}}$，$\boxed{\mathbf{2}}$，$\boxed{\mathbf{3}}$，$\boxed{\mathbf{4}}$ の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 2 次の実正方行列全体のなす $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間を V とし, 線型写像 $f : V \to V$ を

$$f(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (X \in V)$$

で定める. また,

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. 以下の問に答えよ.

(1) $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ は V の基底であることを示し, この基底に関する f の表現行列を求めよ.

(2) 像 $\mathrm{Im}\ f$ の次元を求めよ.

(3) 核 $\mathrm{Ker}\ f$ の基底を一組求めよ.

2 4 次の実正方行列 X に対して, 2 次の正方行列 $X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}$ を

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$$

とブロック分けしたときの小行列とする. この記法のもと, 条件

$$A_{12} = O, \qquad A_{21} = O, \qquad A_{22} = O, \qquad B_{21} = O, \qquad \det\,(AZ + B) \neq 0$$

をみたす 4 次の実正方行列 A, B, Z を考える. ただし, O は 2 次の零行列である. 以下の問に答えよ.

(1) $A_{11}Z_{11} + B_{11}$ と B_{22} はいずれも正則行列であることを示せ.

(2) $S = (AZ + B)^{-1}$ とおくとき, S_{11}, S_{22} を A, B, Z の小行列によってそれぞれ表せ.

(3) C, D を 4 次の実正方行列とし, (2) の S を用いて, $T = (CZ+D)S$ とおく. $C_{12} = O$ ならば,

$$T_{11} = (C_{11}Z_{11} + D_{11})(A_{11}Z_{11} + B_{11})^{-1}$$

が成り立つことを示せ.

3 写像 $\Phi : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を

$$\Phi(r,t) = (r\cosh t, r\sinh t) \qquad (r > 0,\ t \in \mathbb{R})$$

で定める. ただし,

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

である. 以下の問に答えよ.

(1) 定数 $r_0 > 0$ に対して, 点 $(x, y) = \Phi(r_0, t)$ は曲線

$$C_{r_0} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 - y^2 = r_0^2,\ x \geq r_0\}$$

の上にあることを示せ.

(2) 写像 $\Phi : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は単射であることを示せ. また, Φ の像は領域

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x + y > 0,\ x - y > 0\}$$

に等しいことを示せ.

(3) 定数 $r_0 > 0$ と $t_0 > 0$ に対して, 点 $(x_0, y_0) = \Phi(r_0, t_0)$ を P_0 とする. 原点 $(0, 0)$ と点 P_0 を結ぶ線分, x 軸, および (1) の曲線 C_{r_0} で囲まれる領域を図示し, その面積を求めよ.

4 以下の問に答えよ.

(1) 実数列 $\{A_n\}$ は, $\lim_{n\to\infty} A_n = \infty$ となる発散列, または $\lim_{n\to\infty} A_n > 1$ となる収束列とする. このとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{A_n}}$ は収束することを示せ.

(2) $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき, 等式

$$(\log n)^{(\log n)^{\alpha}} = n^{f_\alpha(\log n)}$$

を任意の整数 $n \geq 2$ に対してみたすような $(0, \infty)$ 上の関数 $f_\alpha(t)$ を与えよ.

(3) $\alpha \in \mathbb{R}$ をパラメータとする級数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{(\log n)^{\alpha}}}$$

の収束, 発散を判定せよ.