2014年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午後の部

2013 年 7 月 27 日（土）13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある．$\boxed{\mathbf{1}}$，$\boxed{\mathbf{2}}$，$\boxed{\mathbf{3}}$，$\boxed{\mathbf{4}}$ の **4** 題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 a, b, c, d を実数とする．行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

について, 以下の問に答えよ.

(1) A の固有多項式を求めよ.

(2) A の任意の固有値に対して, その固有空間は 1 次元であることを示せ.

(3) 特に, $a = b = -4$, $c = 3$, $d = 2$ のとき, A のジョルダン標準型を求めよ (標準型に変換する正則行列は求めなくてよい).

（次ページあり）

2 以下の問に答えよ．

(1) 任意の正の整数 n に対して不等式

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log n$$

が成り立つことを示せ.

(2) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ は $n \to \infty$ のときに収束することを示せ.

(3) 実数係数の多項式 $P(X)$, $Q(X)$ の組のうちで, 任意の正の整数 n に対して

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

となるものは存在しないことを示せ.

3 $a > 0$ を定数とする. 以下の問に答えよ.

(1) $N_1, N_2 > 0$ と $M > a$ をとり, 複素平面上で 4 点 $-N_1$, N_2, $N_2 + iM$, $-N_1 + iM$ を頂点とする長方形の周に反時計回りの向きを入れた積分路を C で表す. 実数 ξ をパラメータとする積分

$$\int_C \frac{e^{i\xi z}}{z - ia}\, dz$$

の値を求めよ.

(2) $\xi > 0$ とするとき, 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi x}}{x - ia}\, dx$$

は収束することを示し, その値を求めよ.

(3) $\xi < 0$ とする. (1) の積分路をとり直すことにより, 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi x}}{x - ia}\, dx$$

は収束することを示し, その値を求めよ.

4 $\mathbb{R}^n$ において, 点 $a \in \mathbb{R}^n$ の近傍で定義された実数値関数 f が a で連続であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$x \in \mathbb{R}^n,\ \|x - a\| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{A}$$

となる $\delta = \delta(a) > 0$ が存在することをいう. ただし, $\|\cdot\|$ はユークリッドノルム, すなわち $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ と定義されるものである. 以下の問に答えよ.

(1) (A) が成り立つとき, $\|y - a\| < \dfrac{\delta}{2}$ をみたす任意の $y \in \mathbb{R}^n$ について

$$x \in \mathbb{R}^n,\ \|x - y\| < \frac{\delta}{2} \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$$

が成立することを示せ.

(2) 有界閉集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ の近傍で定義された実数値関数 f がすべての $a \in K$ において連続であるとする. このとき, f は K 上で一様連続であること, すなわち任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$x, y \in K,\ \|x - y\| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

となる $\delta > 0$ が存在することを示せ.