2014年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午前の部

2013 年 7 月 27 日（土）9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$ ， $\boxed{\mathbf{2}}$ ， $\boxed{\mathbf{3}}$ ， $\boxed{\mathbf{4}}$ の **4** 題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

によって定められる $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^4$ への線型写像

$$f(u) = Au \qquad (u \in \mathbb{R}^4)$$

について, 以下の問に答えよ.

(1) 核 $\mathrm{Ker}\ f$ の次元と一組の基底を求めよ.

(2) 像 $\mathrm{Im}\ f$ の次元と一組の基底を求めよ.

(3) t を実数とし, ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \\ t \end{pmatrix}$$

で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W_t とおく. 和空間 $(\mathrm{Im}\ f) + W_t$ が 3 次元部分空間となるように, t の値を定めよ.

2 行列 A の転置行列を ${}^tA$ で表す．$n \geq 2$ を整数として，n 次の実対称行列 A が正値であるとは，任意の列ベクトル $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して ${}^tuAu > 0$ が成り立つことをいう．以下の問に答えよ．

(1) B を実正則行列とするとき，$A = {}^tBB$ は正値実対称行列であることを示せ．

(2) 正値実対称行列 A のすべての固有値は正の実数であることを示せ．

(3) A を正値実対称行列とするとき，$A = {}^tBB$ となる実正則行列 B が存在することを示せ．

3 以下の問に答えよ.

(1) 辺の長さの総和が 12 であるような直方体のうちで表面積が最大になるものを求めよ.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ を示せ. また, この結果を用いて, 広義積分

$$\iint_D e^{-ax-by}\,dxdy, \qquad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ y - x^2 > 0\}$$

の値を求めよ. ただし, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ とする.

(3) $\mathbb{R}^3$ において, 立体

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ |x| \le 2,\ |y| \le 2,\ 0 \le z \le 4 - x^2\}$$

の内部にある円柱面 $x^2 + y^2 = 4$ の面積を求めよ.

4 以下の問に答えよ.

(1) 区間 $(-1, \infty)$ 上の実数値関数 $f(x) = \log(1+x)$ の $x=0$ のまわりでのテイラー級数展開とその収束半径を求めよ (結論だけでなく, 理由も述べること).

(2) 正の整数 n に対して, $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ とおく. (1) の展開を用いて,

$$\lim_{n\to\infty} n^{\gamma}(\log a_n - 1)$$

が 0 でない有限な値となるように実数 γ を定め, そのときの極限値を求めよ.

(3) (2) の $\{a_n\}$ と γ に対して, 極限値

$$\lim_{n\to\infty} n^{\gamma}(a_n - e)$$

を求めよ.