2013年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午後の部

2013 年 2 月 7 日（木）13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて**4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$ ， $\boxed{2}$ ， $\boxed{3}$ ， $\boxed{4}$ **の 4 題すべてに解答すること．**
4. 答案用紙は**4 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない．**
5. 答案用紙は，**1 枚目が $\boxed{1}$ 用，2 枚目が $\boxed{2}$ 用，3 枚目が $\boxed{3}$ 用，4 枚目が $\boxed{4}$ 用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．**
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 $\mathbb{R}$ 上で定義された 3 つの関数 $u_1(t) = e^t$, $u_2(t) = t\,e^t$, $u_3(t) = \dfrac{t^2}{2}\,e^t$ を考える．

(1) 3 つの関数 $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値 C^∞ 関数全体のなす実ベクトル空間 V の元と考える．このとき，$\{u_1(t), u_2(t), u_3(t)\}$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}$ 上で定義された 3 つの関数 $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ によって生成される V の部分ベクトル空間を W とする．$\dfrac{d}{dt}$ は W から W への線形写像であることを認めて，この写像の基底 $\{u_1(t), u_2(t), u_3(t)\}$ に関する表現行列 A を求めよ．

(3) 微分方程式 $\dfrac{d^3u}{dt^3} - 3\dfrac{d^2u}{dt^2} + 3\dfrac{du}{dt} - u = 0$ の解空間は $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ によって張られる 3 次元ベクトル空間を含むことを証明せよ．

(4) $u(t) = C(t)e^t$ が微分方程式 $\dfrac{d^3u}{dt^3} - 3\dfrac{d^2u}{dt^2} + 3\dfrac{du}{dt} - u = 0$ の解だとすると $C(t)$ は高々 2 次の多項式であることを証明せよ．

(5) 微分方程式 $\dfrac{d^3u}{dt^3} - 3\dfrac{d^2u}{dt^2} + 3\dfrac{du}{dt} - u = 0$ の解空間を求めよ．

2 $[0,\infty)$ 上の関数 ϕ_n $(n=1,2,\dots)$ を $\phi_n(x)=n^2xe^{-nx}$ と定義する．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \phi_n(x)\,dx$ を計算せよ．

(2) 任意の $\delta>0$ について，関数列 $\{\phi_n\}$ は $[\delta,\infty)$ 上で一様に 0 に収束することを示せ．

(3) $[0,\infty)$ 上の任意の有界な連続関数 f に対し $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f(x)\phi_n(x)\,dx=f(0)$ が成り立つことを示せ．

3 以下の問に答えよ．

(1) 関数 $f(z)$ は円板 $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ を含む領域で正則であるとする．このとき，$z \in \mathbb{C}$ が円板 D_R の内部に含まれるとき

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) (1) の結果を用いて，全平面 $\mathbb{C}$ で有界な正則関数 $f(z)$ は $f'(z) \equiv 0$ を満たすことを証明せよ．

(3) 正則関数 $w = e^z$ によって w 平面の領域 $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < a\}$ $(a > 0)$ にうつるような，z 平面の部分集合を求め，図示せよ．

(4) 全平面で定義された正則関数の実部が非正ならば定数関数であることを証明せよ．

4 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 M と $\mathbb{R}^n$ の任意の点 x に対して

$$d(x, M) = \inf\{|x-y| \mid y \in M\}$$

と定める．ただし $|x|$ はユークリッドノルム，すなわち $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ と定義されるものである．

(1) $x \in \overline{M}$ は $d(x, M) = 0$ と同値であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}^n$ の任意の 2 点 x, y と M の任意の点 z に対し $d(x, M) \leq |y-z| + |x-y|$ が成り立つことを示せ．

(3) M を固定するとき，関数 $x \mapsto d(x, M)$ は $\mathbb{R}^n$ 上で連続であることを示せ．

(4) M が閉集合であるとき，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $y^* \in M$ が存在して，

$$|x - y^*| = d(x, M)$$

となることを示せ．