2012年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午後の部

2012 年 2 月 7 日（火）13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない.
2. 問題用紙は表紙を除いて**4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること.
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$ ， $\boxed{2}$ ， $\boxed{3}$ ， $\boxed{4}$ **の 4 題すべてに解答すること**.
4. 答案用紙は**4 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない**.
5. 答案用紙は，**1 枚目が** $\boxed{1}$ **用，2 枚目が** $\boxed{2}$ **用，3 枚目が** $\boxed{3}$ **用，4 枚目が** $\boxed{4}$ **用**となっている．間違えないこと.
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること**.
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること.
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること.
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい.

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す.

1 自然数 $n \geq 2$ に対して，n 次複素正方行列全体の集合を $M_n(\mathbb{C})$ で表す．以下の問に答えよ．

(1) 相異なる対角成分を持つ対角行列 $D \in M_n(\mathbb{C})$ を一つ与えたとき，$DX = XD$ をみたす行列 $X \in M_n(\mathbb{C})$ は対角行列に限ることを示せ．

(2) 行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ が相異なる n 個の固有値を持つとき，$X \in M_n(\mathbb{C})$ に対する方程式 $X^m = A$ の解の個数を求めよ．ただし，m は 2 以上の自然数とする．

2 正の実数 a に対して, $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^a \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する. 以下の問に答えよ.

(1) $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続であることを示せ.

(2) $f(x,y)$ が $(0,0)$ で偏微分可能であるような a の範囲を求めよ. また, そのときの偏微分係数 $f_x(0,0)$ の値を求めよ.

(3) $f(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上で C^1 級であるような a の範囲を求めよ.

3 複素平面内の単位円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ を D で表す．また，複素変数 z のべき級数を

$$f(z) = z + z^2 + z^4 + z^8 + \cdots + z^{2^n} + \cdots$$

で定める．以下の問に答えよ．

(1) べき級数 $f(z)$ の収束半径が 1 であることを示せ．

(2) $0 < x < 1$ に対する左からの極限 $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f(x)$ を考えることにより，$z = 1$ の近傍 U で定義された正則関数 $g(z)$ で $f(z) = g(z)$ $(z \in U \cap D)$ となるものは存在しないことを示せ．

(3) 絶対値が 1 の勝手な複素数 a に対して，$z = a$ の近傍 V で定義された正則関数 $g(z)$ で $f(z) = g(z)$ $(z \in V \cap D)$ となるものは存在しないことを示せ．

ヒント：$z = e^{2\pi i k/2^m}$ (k, m は正整数) のとき，$z^{2^n} = 1$ $(n \geq m)$ である．

4 集合 X と写像 $f : X \to X$ に関する以下の主張のうち，正しいものは証明し，正しくないものについては反例を一つ挙げよ．ただし，X の部分集合 C に対して，$f(C)$ は f による C の像を表す.

(1) 関係 $f \circ f = f$ をみたす f は恒等写像に限る．ここで，$f \circ f$ は，f と f 自身の合成写像を表す.

(2) 写像 $g : X \to X$ で，$g \circ f$ が恒等写像であるものが存在すれば，$f \circ g$ も恒等写像である．ここで，$f \circ g$, $g \circ f$ は，合成写像を表す.

(3) X の部分集合 A, B で $f(A) \subset A$, $f(B) \subset B$ を満たすものに対して，$f(A \cap B) \subset A \cap B$ である.

(4) X の部分集合 A, B で $f(A) \supset A$, $f(B) \supset B$ を満たすものに対して，$f(A \cap B) \supset A \cap B$ である.