

2012年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午前の部

2012年2月7日（火）9:00～12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を除いて4枚1組である。試験開始後に各自確認すること。乱丁、落丁、印刷不鮮明な箇所などがあれば、ただちに監督者に申し出ること。
3. 問題は全部で4題ある。①、②、③、④の4題すべてに解答すること。
4. 答案用紙は4枚1組である。各自確認すること。ホッチキスを外してはならない。
5. 答案用紙は、1枚目が①用、2枚目が②用、3枚目が③用、4枚目が④用となっている。間違えないこと。
6. すべての答案用紙の所定の欄に、受験番号と氏名を記入すること。
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが、その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること。
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合、あるいは計算用紙が足りなくなった場合は、監督者に申し出ること。
9. 試験終了後に提出するものは、4枚1組の答案用紙である。この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい。

記号について：

問題中の \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す。

1 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

の定める線型写像 $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($f_A(x) = Ax$) について, 以下の問に答えよ.

- (1) f_A の核 $\text{Ker}f_A$ と像 $\text{Im}f_A$ の基底をそれぞれ一組求めよ.
- (2) 3 次の正方行列 P で次の条件をみたすものを求めよ. 任意の $x \in \text{Ker}f_A$ に対し $Px = 0$ であり, かつ任意の $x \in \text{Im}f_A$ に対し $Px = x$ である.

2 次の命題が真か偽かを判定せよ．真の場合は証明し，偽の場合は反例をあげ，それが反例であることを示せ．

- (1) ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 の可逆な線型変換 f によって平面 P が平面 Q にうつるとき，平面 P の法線ベクトルの f による像は，平面 Q の法線ベクトルである．
- (2) 2 次実正方行列 A のすべての固有値の絶対値が 1 以下であるとき，任意のベクトル $x \in \mathbb{R}^2$ に対して，集合 $\{A^n x \mid n = 1, 2, \dots\}$ は \mathbb{R}^2 の有界部分集合である．
- (3) 2 次複素正方行列全体のなす複素ベクトル空間において

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\}$$

が 1 次独立ならば， \mathbb{C}^2 において $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} \right\}$ は 1 次独立である．

3 以下の問に答えよ .

(1) 積分

$$\int_1^{\infty} \left\{ \left(\log \frac{x}{x+1} \right) + \frac{1}{1+x} \right\} dx$$

の値を求めよ .

(2) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき , $2\theta < \sin \theta + \tan \theta$ であることを示せ .

(3) \mathbb{R}^2 の上で定義された C^1 級関数 $f(x, y)$ に対する連立微分方程式

$$-y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f$$

を極座標で表し , その解をすべて求めよ .

4 平面の部分集合 D を

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x + y \leq 2, -1 \leq xy \leq 0\}$$

で定める．以下の問に答えよ．

(1) D の概形を図示せよ．

(2) 変数変換 $u = x + y, v = xy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) のヤコビ行列式 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ を求めよ．

(3) 重積分

$$\iint_D |x^3 - y^3| dx dy$$

の値を求めよ．