

2012年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午後の部

2011年7月23日（土）13:00～16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を除いて4枚1組である。試験開始後に各自確認すること。乱丁、落丁、印刷不鮮明な箇所などがあれば、ただちに監督者に申し出ること。
3. 問題は全部で4題ある。①、②、③、④の4題すべてに解答すること。
4. 答案用紙は4枚1組である。各自確認すること。ホッチキスを外してはならない。
5. 答案用紙は、1枚目が①用、2枚目が②用、3枚目が③用、4枚目が④用となっている。間違えないこと。
6. すべての答案用紙の所定の欄に、受験番号と氏名を記入すること。
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが、その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること。
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合、あるいは計算用紙が足りなくなった場合は、監督者に申し出ること。
9. 試験終了後に提出するものは、4枚1組の答案用紙である。この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい。

記号について：

問題中の \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す。

1 V を有限次元複素線型空間とし, $f: V \rightarrow V, g: V \rightarrow V$ を線型写像とする. さらに g は全単射であり, 関係式 $g \circ f \circ g^{-1} \circ f = \text{id}_V$ が成り立っているものとする. ただし, id_V は V の恒等写像とする. 以下の問に答えよ.

- (1) このとき, f も全単射であることを示せ.
- (2) λ が f の固有値ならば, λ は 0 でなく, λ^{-1} も f の固有値であることを示せ.
- (3) $\dim V = 3$ であり, f は固有値 $\mu \neq \pm 1$ をもつものとする. このとき f のジョルダン標準形はどのようになるか答えよ. また f のジョルダン標準形を与える V の基底を一組取り, その基底に関する g の表現行列を決定せよ.

2 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とおく．方程式 $f(x, y) = 0$ が定める平面曲線 C について，以下の問に答えよ．

(1) 直線 $y = tx$ と C との交点を考えることで， C のパラメータ t による表示を与えよ．

(2) 曲線 C のうち，パラメータ $0 \leq t < \infty$ に対応する部分で囲まれた領域 (C の補集合の有界連結成分) の面積を求めよ．

ヒント：反時計まわりの閉曲線 C_0 が囲む面積は，線積分 $\int_{C_0} xdy = -\int_{C_0} ydx$ で与えられる．

3 以下の問に答えよ.

(1) 実数 $\zeta \leq 0$ をパラメータとする有理型関数

$$f(z) = \frac{\exp(-i\zeta z)}{1+z^2}, \quad z \in \mathbb{C}$$

を考える. 実軸上の線分 $C_1 = [-R, R]$ と $Re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) で表される半円 C_2 からなる閉曲線に反時計回りの向きを入れた積分路を C とする. ただし, $R > 1$ は定数である.

$$\int_C f(z) dz = \pi \exp(\zeta)$$

を示せ.

(2) $\zeta \leq 0$ のとき $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\zeta t)}{1+t^2} dt = \pi \exp(\zeta)$ を示せ.

(3) $\zeta > 0$ のとき $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\zeta t)}{1+t^2} dt$ を求めよ.

4 ベクトルの長さを与える写像 $\| \cdot \| : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ に関して, 次の問に答えよ.

(1) $\| \cdot \|$ による \mathbb{R}^2 の開集合の像は $[0, \infty)$ の開集合であることを示せ.

(2) $\| \cdot \|$ による \mathbb{R}^2 の閉集合の像は $[0, \infty)$ の閉集合であることを示せ.