2010年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第 2 次募集）

午後の部

2010 年 2 月 9 日（火）13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{1}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{2}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{3}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{4}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：
問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 V を $\mathbb{C}$ 上の n 次元線型空間とする．V の線型変換 f は 相異なる固有値 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ を持つものとし，対応する固有空間をそれぞれ $W_1, W_2, \ldots, W_n$ とする．I を V の恒等変換として，V の線型変換の組 $f_j = f - \alpha_j I$（$j = 1, 2, \ldots, n$）を定める．また，この組から f_j を除いたものを合成して得られる V の線型変換 $g_j = f_1 \cdots f_{j-1} f_{j+1} \cdots f_n$ を考える．以下の問に答えよ．

(1) f_j の 各 W_k への制限（$k = 1, 2, \ldots, n$）は，W_k の線型変換となることを示せ．

(2) $g_j \neq 0$ であることを示せ．

(3) g_j の像 $\mathrm{Im}\, g_j$ は，$\mathrm{Im}\, g_j \subset W_j$ をみたすことを示せ．

(4) $\mathrm{Im}\, g_j = W_j$ を示せ．

2 $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数で，あるコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}$ の外では常に 0 の値をとるものとし，$\varphi(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の正値連続関数で，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1$$

をみたすものとする．また，0 でない $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$g_t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_t(x-y) f(y)\,dy, \qquad \varphi_t(x) = \frac{1}{|t|}\varphi\Big(\frac{x}{t}\Big)$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_t(x-y) f(x)\,dy$ を示せ．

(2) 任意の $\delta > 0$ に対して，

$$\lim_{t \to 0} \int_{|x| \geq \delta} \varphi_t(x)\,dx = 0$$

を示せ．

(3) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上有界で，かつ一様連続である．理由を述べよ．

(4) $\|g_t - f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g_t(x) - f(x)|$ とおくとき，

$$\lim_{t \to 0} \|g_t - f\| = 0$$

を示せ．

3 Γ は複素平面上における原点を中心とする半径 1 の円周であり，反時計回りの向きが入っているものとする．以下の問に答えよ．

(1) 複素数 α が $|\alpha| < 1$ をみたすとき，積分

$$\int_\Gamma \frac{\log(2+z)}{(z-\alpha)(z-\alpha^{-1})}\,dz$$

の値を求めよ．ただし $z \neq 0$ に対して，$\log z = \log|z| + i\arg z$ の分枝は $-\pi < \arg z \leq \pi$ で定める．

(2) Γ が $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ と表示されることを用いて，積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{\log(5+4\cos\theta)}{5+4\cos\theta}\,d\theta$$

の値を求めよ．

4 以下の問に答えよ．

(1) 集合 V, W の間の 2 つの写像 $f : V \to W,\ g : W \to V$ に対し，その合成写像 $g \circ f : V \to V$ は恒等写像であるものとする．このとき，以下の主張について正しければ証明し，誤りならば反例をあげよ．

(a) f は単射である．

(b) f は全射である．

(c) g は単射である．

(d) g は全射である．

(2) $\mathbb{R}$ の空でない部分集合 E に対して $k \in \mathbb{R}$ が E の上界であるとは，任意の $x \in E$ に対して $x \leq k$ が成立することをいう．E の上界の中で最小のものを E の上限という．$\mathbb{R}$ の空でない部分集合 M に対して $M' = \{x + 1 \,|\, x \in M\}$ とおくとき，以下の主張について正しければ証明し，誤りならば反例をあげよ．

(a) α が M の上界であるとき，$\alpha + 1$ は M' の上界である．

(b) α が M の上限であるとき，$\alpha + 1$ は M' の上限である．