2010年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午後の部

2009 年 7 月 25 日（土）13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある．$\boxed{\mathbf{1}}$，$\boxed{\mathbf{2}}$，$\boxed{\mathbf{3}}$，$\boxed{\mathbf{4}}$ の **4** 題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 V, W を $\mathbb{C}$ 上の有限次元線型空間とし，$f : V \to W$ は線型写像とする．以下の問に答えよ．

(1) f が全射のとき，ある線型写像 $g : W \to V$ が存在して，g と f の合成写像 fg が W の恒等写像となることを示せ．

(2) f が単射のとき，ある線型写像 $g : W \to V$ が存在して，gf が V の恒等写像となることを示せ．

(3) 一般に，ある線型写像 $g : W \to V$ が存在して，$f = fgf$ かつ $g = gfg$ となることを示せ．

(4) g が (3) の条件をみたす線型写像のとき，f は g の像 $\mathrm{Im}\, g$ から f の像 $\mathrm{Im}\, f$ への同型写像であることを示せ．

2 ここでは，平面から原点を除いた集合を $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で表し，U 上の関数はすべて実数値であるものとする．また，U 上の関数 $h(x,y)$ が調和関数であるとは，C^2 級でありかつ U 上で常に $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$ をみたすことをいう．以下の問に答えよ．

(1) U 上の連続関数 $f(x,y)$ に対して，等式

$$\int_{-r}^{r} \left\{ f(\sqrt{r^2-y^2}, y) - f(-\sqrt{r^2-y^2}, y) \right\} dy = r \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta \, d\theta$$

$$\int_{-r}^{r} \left\{ f(x, \sqrt{r^2-x^2}) - f(x, -\sqrt{r^2-x^2}) \right\} dx = r \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta \, d\theta$$

を示せ．ただし $r > 0$ とする．

(2) U 上の C^1 級関数 $g(x,y)$ に対して，等式

$$\iint_{\varepsilon^2 \le x^2+y^2 \le r^2} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dxdy = r\int_0^{2\pi} g(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta\,d\theta - \varepsilon\int_0^{2\pi} g(\varepsilon\cos\theta, \varepsilon\sin\theta)\cos\theta\,d\theta$$

$$\iint_{\varepsilon^2 \le x^2+y^2 \le r^2} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,dxdy = r\int_0^{2\pi} g(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\,d\theta - \varepsilon\int_0^{2\pi} g(\varepsilon\cos\theta, \varepsilon\sin\theta)\sin\theta\,d\theta$$

を示せ．ただし，$0 < \varepsilon < r$ とする．

(3) U 上の調和関数 $h(x,y)$ に対して $H(\rho,\theta) = h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ とおくとき，$F(\rho) = \rho\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\partial H}{\partial \rho}(\rho,\theta)\,d\theta$ は $\rho > 0$ によらず一定であることを示せ．

(4) U 上の調和関数で，その値が原点からの距離のみで定まるものをすべて求めよ．

3 複素平面内における半径 $r > 0$ の上半円周を

$$C_r = \left\{ re^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi \right\}$$

で表すものとする．C_r には反時計回りの向きが入っているものとする．以下の問に答えよ．

(1) 極限

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1 + iz - e^{iz}}{z^3}\, dz$$

の値を求めよ．

(2) $\mathbb{C}$ 上で正則な関数 $g(z)$ は

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} g(z)\, dz = 0$$

をみたすことを示せ．ここで，極限は ε に関する正の側からの右極限の意味であるものとする．

(3) 上の (2) と同じ極限の意味で，

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{1 + iz - e^{iz}}{z^3}\, dz$$

の値を求めよ．

(4) 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^3}\, dx$$

の値を求めよ．

4 以下の問に答えよ．

(1) 位相空間 X について，以下の２つの性質 (a) と (b) は同値であることを示せ．

(a) X には，空ではない閉部分集合全体の中で最小のものがある．

(b) X は空ではなく，X の任意の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $X = U_\lambda$ が成立する．

(2) 位相空間 X, Y に対して連続写像 $f : X \to Y$ が与えられているとき，X が上の (a) の性質をみたすならば，像 $f(X)$ も (a) の性質をみたす位相空間となることを示せ．