2009年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第 2 次募集）

午後の部

2009 年 2 月 1 日（日）13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の 4 題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 以下の問に答えよ．

(1) W を $\mathbb{C}$ 上の有限次元線型空間とし，$U \subset W$ をその線型部分空間とする．もし，$\dim U = \dim W$ ならば，$U = W$ であることを示せ．

以下では，V を $\mathbb{C}$ 上の 4 次元線型空間とし，$F : V \longrightarrow V$ を線型変換とする．F は次の性質 $(*)$ を満たしているとする．

$$\dim \operatorname{Im} F = 3, \quad \dim \operatorname{Im} F^2 = 2, \quad \dim \operatorname{Im} F^3 = 1, \quad \dim \operatorname{Im} F^4 = 1 \qquad (*)$$

ただし，$\operatorname{Im} F$ は F の像を表し，$F^2 = F \circ F$ などと表している．

(2) $\operatorname{Ker} F \subset \operatorname{Im} F$ となることを示せ．

(3) $\operatorname{Im} F^2 = \operatorname{Ker} F \oplus \operatorname{Im} F^3$ となることを示せ．

(4) $(*)$ をみたす線型変換 F のジョルダン標準形を求めよ．

2 2 変数関数

$$f(x,y) = (x^4 - y^4)e^{-(x^2+y^2)}$$

の極大値，極小値およびそれらを与える点 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ をすべて求めよ．

3 $0 < r < 4 < R,\ 0 < \delta < \pi/2$ とする．複素平面 $\mathbb{C}$ 上に次の線分 C_1, C_3 と円弧 C_2, C_4

$$C_1 = \{z = t \mid r \leq t \leq R\}, \qquad C_2 = \{z = Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi - \delta\},$$

$$C_3 = \{z = te^{i(2\pi-\delta)} \mid r \leq t \leq R\}, \quad C_4 = \{z = re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi - \delta\}$$

を考える．向きは，閉曲線 $C_{\delta,r,R} = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ に $z = -4$ を中心に反時計回りにより定まるものを与える．複素関数

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}(z+4)^2}$$

に対し，以下の問に答えよ．ここで $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\log z}$ で，$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し， $\log z = \log|z| + i \arg z$ の分枝は $0 \leq \arg z < 2\pi$ で定める．

(1) $x > 0,\ 0 < \theta < 2\pi$ とする．このとき，$\displaystyle\lim_{\theta \to 2\pi} f(xe^{i\theta})$ を $f(x)$ を用いて表せ．

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_{C_{\delta,r,R}} f(z)dz$ の値を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\lim_{\delta\to 0}\left|\int_{C_2} f(z)dz\right|$ の値を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{r\to 0}\lim_{\delta\to 0}\left|\int_{C_4} f(z)dz\right|$ の値を求めよ．

(5) 以上を用いて，実数関数の広義積分

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)^2}$$

の値を求めよ．

4 以下の問に答えよ．

(1) 集合 X の部分集合の族 $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ とその補集合の族 $\{U_\lambda = X \setminus A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ に対し，次の条件 (a), (b) は互いに同値であることを示せ．

(a) $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \emptyset.$

(b) $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = X.$

(2) 位相空間 X がコンパクトであることの定義を X の開被覆を用いて述べよ．

(3) 位相空間 X はコンパクトであるとし，X の閉集合の族 $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ が次の性質 $(*)$ をみたしているとする．

$(*)$　『任意の有限個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ に対して，$\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_{\lambda_i} \neq \emptyset$.』

このとき，$\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ が成り立つことを示せ．

(4) コンパクトな位相空間 X の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $x_i \neq x_j (i \neq j)$ をみたすものを考える．いま，正の整数 k に対して $B_k = \{x_n\}_{n=k}^{\infty}$ と定め，$A_k = \overline{B_k}$ を B_k の X における閉包，すなわち B_k を含む X の最小の閉集合とする．このとき，$\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$ が成り立つことを示せ．

（2009 年 2 月 1 日）　（以上）