# 2009年度 名古屋大学大学院<br>多元数理科学研究科博士課程（前期課程）<br>入学試験問題

## 午前の部

2008 年 7 月 26 日（土）9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の **4** 題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{1}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{2}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{3}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{4}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

**1** 複素数を係数とする $t$ について 2 次以下の多項式全体のなす $\mathbb{C}$ 上の線型空間を

$$V = \{p + qt + rt^2 \mid p, q, r \in \mathbb{C}\}$$

とする．以下の問に答えよ．

(1) 線型変換 $S : V \to V$ は，任意の $f(t) \in V$ に対し $S(f(t)) = f(1 + 2t)$ をみたすとする．このとき，$V$ の基底 $\{1, t, t^2\}$ に関する $S$ の表現行列を求め，その固有値を求めよ．また，それぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(2) 線型変換 $T : V \to V$ は，

$$T(1 + t) = (1 + t)^2, \quad T(1 - t) = (1 - t)^2, \quad T(t^2) = 1 + t^2$$

をみたすとする．$g(t) = a + bt + ct^2 \in V$，$(a, b, c \in \mathbb{C})$ が与えられたとき，$T(f(t)) = g(t)$ となる $f(t) \in V$ が存在するための $g(t)$ に関する必要十分条件を求めよ．またそのとき，$T(f(t)) = g(t)$ となる $f(t)$ をすべて求めよ．

**2** $p,q$ を実数とする．$\mathbb{R}^5$ の中の線型部分空間 $V,W$ を以下で定義する．

$$V=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}\;\middle|\;\begin{array}{rrrrrl}2x_1&+(q-2)x_2&-4x_3&-(p+3)x_4&+2x_5&=0\\&(p+1)x_2&+2qx_3&+(p+1)x_4&+qx_5&=0\\6x_1&+(p+3q-5)x_2&+(q-12)x_3&-(2p+8)x_4&+(q+6)x_5&=0\end{array}\right\}$$

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}\;\middle|\;\begin{array}{rrrrrl}2x_1&+(p+q-1)x_2&+(q-4)x_3&-2x_4&+(q+2)x_5&=0\\&p(p+1)x_2&+qx_3&+p(p+1)x_4&+p(p+1)x_5&=0\end{array}\right\}$$

このとき以下の問に答えよ．ただし，条件を述べる際には，必要あらば「かつ」,「または」の言葉を用いて論理的に正確に述べること．

(1) $V$ と $W$ が線型空間として同型になるための，$p,q$ に関する必要十分条件を求めよ．

(2) $V=W$ となるための，$p,q$ に関する必要十分条件を求めよ．またそのとき，$V$ の基底を一組求めよ．

(3) $V\subsetneqq W$ となるための，$p,q$ に関する必要十分条件を求めよ．また，そのときの $V,W$ の次元を求めよ．

**3** 以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の $C^1$ 級関数 $f(x,y)$ に対して，

$$x = e^{\varphi}\cos\theta, \quad y = e^{\varphi}\sin\theta$$

と変数変換し，$\varphi, \theta$ の関数 $g(\varphi,\theta)$ を $g(\varphi,\theta) = f(e^{\varphi}\cos\theta, e^{\varphi}\sin\theta)$ で定義する．このとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を $\dfrac{\partial g}{\partial \varphi}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$, $\varphi$, $\theta$ を用いて表せ．

(2) $\alpha > 0$ を正の実数とする．このとき，次の広義積分の収束・発散を論ぜよ．また，収束するとき，その広義積分の値を求めよ．

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x^{\alpha}} dx.$$

(3) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2,\ y \le x\}$ とするとき，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D y e^{x^3} dxdy.$$

**4** 以下の問に答えよ．

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$e^x = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + \frac{1}{n!}\int_0^x e^t (x-t)^n dt \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つことを，$n$ に関する数学的帰納法により示せ．

(2) $x \geq 0$ に対して

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \int_0^x e^t (x-t)^n dt \leq e^x \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 次の条件をみたす最小の自然数 $N$ を求めよ．(それが実際に最小であることも証明すること.) ただし，$e < 3$ であることは用いてよい．

『$N$ 以上のすべての自然数 $n$ に対して，

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \right| < \frac{1}{200}$$

が成立する.』

（2008 年 7 月 26 日） （以上）