2008年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第 2 次募集）

午後の部

2008 年 2 月 14 日（木）13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて**4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の 4 題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は**4 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない**．
5. 答案用紙は，**1 枚目が** $\boxed{1}$ **用，2 枚目が** $\boxed{2}$ **用，3 枚目が** $\boxed{3}$ **用，4 枚目が** $\boxed{4}$ **用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．**
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

2008 年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第 2 次募集）

午後の部

以下の 4 題の問題すべてに解答せよ．

1 V を有限次元実線型空間とし，線型変換 $F : V \longrightarrow V$ が $F \circ F = \mathrm{Id}_V$ （Id_V は V 上の恒等変換を表す）をみたしているとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) λ が F の固有値ならば，$\lambda = 1$ または $\lambda = -1$ であることを示せ．

以下では，F は $1, -1$ をともに固有値にもつとし，それらに対する固有空間をそれぞれ W, W' とする．

(2) $W \cap W' = \{0\}$ となることを示せ．

(3) $V = W \oplus W'$ と直和分解されることを示せ．

(4), (5) では，線型変換 $G : V \longrightarrow V$ で $F \circ G = -G \circ F$, $G \circ G = -\mathrm{Id}_V$ をみたすものが存在すると仮定する．

(4) $w \in W$ ならば $G(w) \in W'$ となること，および，$w' \in W'$ ならば $G(w') \in W$ となることを示し，$\dim W = \dim W'$ となることを導け．

(5) $m = \dim W$ とするとき，V の基底で，それに関する G の表現行列が

$$\begin{pmatrix} O & -E_m \\ E_m & O \end{pmatrix}$$

（O は零行列，E_m は単位行列を表す）の形になるものが存在することを示せ．

2 以下の問に答えよ．

(1) 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して，${}^tPAP$ が対角行列となるような直交行列 P を 1 つ求めよ．

(2) 3 変数関数

$$f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 4xz - 4yz = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

に対して，$\dfrac{f(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$ $((x,y,z) \neq (0,0,0))$ の上限および下限

$$\sup\left\{ \frac{f(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2} : x,y,z \in \mathbb{R},\ (x,y,z) \neq (0,0,0) \right\},$$

$$\inf\left\{ \frac{f(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2} : x,y,z \in \mathbb{R},\ (x,y,z) \neq (0,0,0) \right\}$$

を求めよ．

3 以下の問に答えよ.

(1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0\}$ 上の重積分 $\displaystyle\iint_D e^{-2(x^2+y^2)} dxdy$ を考えることにより，積分

$$\int_0^\infty e^{-2t^2} dt$$

の値を求めよ.

(2) 複素関数 $f(z) = e^{iz^2}$ $(z \in \mathbb{C})$ の線積分

$$\int_{C_L} f(z) dz$$

（ただし，L は正の実数であり，C_L は 3 点 $0,\ L,\ (1+i)L$ を頂点とする直角二等辺三角形の周である）を考えることにより，積分

$$\int_0^\infty \cos(t^2) dt, \quad \int_0^\infty \sin(t^2) dt$$

の値を求めよ.

4 $\mathbb{R}^N$ を N 次元ユークリッド空間とし，その上の通常の距離を d で表す．点 $a \in \mathbb{R}^N$ と正数 r に対して，

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^N : d(a,x) < r\}$$

を，a を中心とする半径 r の開球と呼ぶ．また，$\mathbb{R}^N$ の部分集合 S に対して，

$$\overline{S} = \{x \in \mathbb{R}^N : \text{任意の正数 } \varepsilon \text{ に対して } B_\varepsilon(x) \cap S \neq \emptyset\}$$

と定義する．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 点 $x \in \mathbb{R}^N$ と部分集合 $S \subset \mathbb{R}^N$ $(S \neq \emptyset)$ に対して，$x \in \overline{S}$ となるための必要十分条件は，S 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ で x に収束するものが存在することである．これを示せ．

(2) 写像 $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ が連続であることの定義を開球を用いて述べよ．

(3) (2) で与えた定義に基づいて，$f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ が連続ならば，任意の部分集合 $S \subset \mathbb{R}^N$ $(S \neq \emptyset)$ に対して $f(\overline{S}) \subset \overline{f(S)}$ となることを示せ．

（以上）