2008年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第 2 次募集）

午前の部

2008 年 2 月 14 日（木）9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて**4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の 4 題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は**4 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない**．
5. 答案用紙は，**1 枚目が $\boxed{1}$ 用，2 枚目が $\boxed{2}$ 用，3 枚目が $\boxed{3}$ 用，4 枚目が $\boxed{4}$ 用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．**
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

2008 年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第 2 次募集）

午前の部

以下の 4 題の問題すべてに解答せよ．

1 行列

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 9 & -9 \\ 9 & -8 & 9 \\ 9 & -9 & 10 \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．また，それぞれの固有値に対して，対応する固有空間の基底を 1 組求めよ．

(2) $A = B^2$ をみたす実行列 B が存在するかどうか答えよ．もし存在するならばそのような行列 B を 1 つ求め，もし存在しないならばその理由を説明せよ．

(3) $A = C^3$ をみたす実行列 C が存在するかどうか答えよ．もし存在するならばそのような行列 C を 1 つ求め，もし存在しないならばその理由を説明せよ．

2 標準的なユークリッド内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が与えられた実線型空間 $\mathbb{R}^4$ において，次のベクトル v_1, v_2, v_3, v_4 で張られる部分空間を W とする．

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

また，実数を成分とする $m \times n$ 行列 X に対して，$F_X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を X の定める線型写像（つまり，$F_X(v) = Xv$ $(v \in \mathbb{R}^n)$ である）とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) W とその直交補空間 $W^\perp$ の基底をそれぞれ 1 組求めよ．

(2), (3) では，$m = \dim W^\perp$ とする．

(2) $m \times 4$ 行列 A で，$\mathrm{Ker}\, F_A = W$ となるものを 1 つ求めよ．

(3) $4 \times m$ 行列 B で，$\mathrm{Im}\, F_B = W^\perp$ となるものを 1 つ求めよ．

(4) 4 次正方行列 C で，

$$\mathrm{Ker}\, F_C = W, \quad \mathrm{Im}\, F_C = W^\perp$$

を同時にみたすものを 1 つ求めよ．

3 α を正の実数とし，関数 $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義する：

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|}{(x^2+y^2)^\alpha} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\alpha = 1$ のとき，$f_\alpha(x,y)$ は原点で連続ではないことを示せ．

(2) $f_\alpha(x,y)$ が原点で連続であるための α に関する条件を求めよ．

(3) $f_\alpha(x,y)$ が原点で全微分可能であるための α に関する条件を求めよ．

(4) $0 < \varepsilon < 1$ をみたす実数 ε に対して $D_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$ とおくとき，次の極限が存在するための α に関する条件を求めよ．

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{D_\varepsilon} f_\alpha(x,y)\,dxdy.$$

4 以下の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ $(x > 0)$ のグラフを描け．特に，$x \to 0$, $x \to \infty$ のときの漸近挙動と関数の極値に注意せよ．

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2}^{\,a_n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

によって定義するとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在すること，および，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ となることを示せ.（必要ならば (1) の結果を用いてよい.）

(3) $f(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数とし，n を非負整数とする．$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ が任意の実数 t に対して成り立つとき，$x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = nf$ となることを示せ.

(4) 曲線 $x^3 - 6xy + 2y^3 = 0$ 上の点 $(6, -6)$ における接線の方程式を求めよ.