名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００７年度前期課程大学院入学試験問題

午前の部

以下の４題の問題すべててに解答せよ.

$\boxed{1}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の階数を求めよ.

(2) 行列 A の固有方程式を求めよ.

(3) 行列 A は対角化可能かどうかを論ぜよ.

$\boxed{2}$ V を 2 次実正方行列全体のなす実ベクトル空間とする．$r \in \mathbb{R}$ に対して

$$\phi_r(A) = A + r\,({}^t A) \qquad (A \in V)$$

とおく．このとき，以下の問に答えよ.

(1) ϕ_r は V から V への線型変換であることを確かめよ.

(2) $\operatorname{Ker} \phi_r$ の次元を求めよ.

(3) $\operatorname{Im} \phi_r$ の次元を求めよ.

$\boxed{3}$ 以下の問に答えよ．

(1) 定数 a, b は $0 < a < b$ を満たすとし，xy-平面上の領域

$$R = \{(x, y) \,|\, a \leq x + y \leq b,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

を考える．変数変換 $s = x + y, t = x - y$ によって領域 R は st-平面上のどのような領域にうつるか，図示せよ．

　また，積分

$$\iint_R \frac{x^2 + y^2}{(x + y)^3}\, dxdy$$

を求めよ．

(2) $f(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級関数で，方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x, y) = 0$$

を満たすものとする．また，変数変換 $s = x + y, t = x - y$ を用いて $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $g(s, t)$ を

$$g(s, t) = f(x, y)$$

で定義する．このとき，$g(s, t)$ の満たす方程式を求めよ．また，$f(x, y)$ はある 1 変数関数 f_1, f_2 により

$$f(x, y) = f_1(x + y) + f_2(x - y)$$

と表されることを示せ．

$\boxed{4}$ $v(x)$ は $x \geq 0$ 上の正値の連続関数とし，$x \geq 0$ 上の関数 $u(x)$ を

$$u(x) = \int_0^x v(t)dt$$

により定義する．条件

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = \infty$$

が成り立つと仮定する．このとき，実数値をとるパラメータ α を含む広義積分

$$\lim_{R\to\infty} \int_1^R u(x)^\alpha v(x)\,dx$$

の収束，発散を調べよ．

（２００６年7月２９日）　（以上）