名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００６年度前期課程入学試験問題

午前の部

以下の４題の問題すべてに解答せよ．答えのみでなく解答の筋道も記述すること．

$\boxed{1}$ a, b を $0 < a, b < 1$ をみたす実数とし, 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) A の固有値, 固有ベクトルを求めよ．また, A が対角化可能であることを示せ．

(2) $\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

(3) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ が与えられたとき, ベクトルの列 $\{\mathbf{v}_n\}$ を漸化式

$$\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

によって定める．$n \to \infty$ としたとき $\{\mathbf{v}_n\}$ が零でないベクトルに収束するために $\mathbf{v}_1$ がみたすべき条件を求めよ．

（２００５年７月３０日） （次ページあり）

$\boxed{2}$ 4 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & 0 \\ 2 & \beta & 10 & \alpha \\ \alpha & 4 & \beta & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

とベクトル $\mathbf{b}$ を使って表される 4 元連立 1 次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

の解空間が

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & + & 2s & & \\ & - & 3s & + & 2t \\ 1 & + & s & - & t \\ 3 & - & s & + & t \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

で与えられるとする．このとき, 以下の問に答えよ.

(1) α, β の値を求めよ.

(2) ベクトル $\mathbf{b}$ を決定せよ.

(3) A が表す $\mathbb{R}^4$ の線形変換の像の次元と一組の基底を求めよ.

(4) A が表す $\mathbb{R}^4$ の線形変換の核の次元と一組の基底を求めよ.

(5) $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ に対して, 4 元連立 1 次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

の解が存在すると仮定する．このとき, この方程式の解空間は $\mathbb{R}^4$ のある部分ベクトル空間を平行移動したものであることを示し, その部分ベクトル空間の一組の基底を与えよ.

3 以下の問に答えよ.

(1) 次の極限を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2006^n}{n!}$$

(2) 実数 $e^{1/5}$ を小数表示したものの小数点以下 2 桁目までを正しく求めよ. 関数 e^x のテーラー展開を x^2 の項まで計算したものを用い, 誤差評価を行うこと. $e<3$ は既知としてよい.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{(x^{11}+x^9)^{\frac{1}{10}}}$ および $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^{11}+x^9)^{\frac{1}{10}}}$ の収束・発散を判定せよ.

(4) $D=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x^2-2xy+y^2\leq 1\,\}$ とするとき, 次の積分の値を求めよ.

$$\iint_D (x-y)^2\,dxdy$$

$\boxed{4}$ 関数

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(4x^2+2y^2+1), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

について, 以下の問に答えよ.

(1) $f(x,y)$ の臨界点を全て求めよ. ただし, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ が $f(x,y)$ の臨界点であるとは $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta) = 0$ が成り立つこととする.

(2) $f(x,y)$ の極大点, 極小点を全て求めよ.

(3) $f(x,y)$ の $\mathbb{R}^2$ 全体での最大値, 最小値それぞれについて, 存在するなら値を求め, 存在しないならその理由を説明せよ.