

名古屋大学大学院多元数理科学研究科  
2002年度前期課程入学試験問題

数学基礎

以下の4題の問題すべてに解答せよ.

1 次の行列  $A$  によって与えられる線型写像  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(1)  $T$  の像  $\text{Im}(T)$  の次元と1組の基底を求めよ.

(2)  $T$  の核  $\text{Ker}(T)$  の次元と1組の基底を求めよ.

2  $a \geq 0$  とし, 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える.

(1)  $a = 4$  のとき,  $P^{-1}AP$  が対角行列となるような正則行列  $P$  をひとつ求めよ.

(2)  $A$  が対角化可能でないような  $a$  の値を全て求めよ.

3 以下の問に答えよ.

(1) 関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad (x > -1)$$

の  $x = 0$  におけるテイラー展開を求めよ. ただし収束性について議論する必要はない.

(2) 関数

$$g(x) = \log \frac{1 + \sqrt{1+x}}{2} \quad (x > -1)$$

の  $x = 0$  におけるテイラー展開が次の級数で与えられることを示せ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{2n \cdot (2n)!!} x^n$$

また, この級数の収束半径を求めよ. ただし

$$(2n)!! = (2n)(2n-2) \cdots 4 \cdot 2,$$

$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1$$

である.

4  $\lambda$  を実定数とする.  $0 < \varepsilon < 1$  に対し

$$D_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$$

とおくとき, 次の広義積分が収束するかどうかを判定せよ. また収束するときは, 広義積分の値を求めよ.

$$(1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\lambda/2}} dx dy$$

$$(2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{\log \sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{\lambda/2}} dx dy$$