2016年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（後期課程）
入学試験問題

2015 年 7 月 29 日（水）9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **5** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 3 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$ ， $\boxed{\mathbf{2}}$ ， $\boxed{\mathbf{3}}$ の **3** 題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は **3** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. $\boxed{\mathbf{3}}$ では，選択した小問の番号を答案用紙表面上部の所定の欄に記入すること．
9. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
10. 試験終了後に提出するものは，3 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 以下の問に答えよ．

(1) エルミート行列 A の固有値は実数であることを示せ．

(2) $A,\ B$ は次数の等しいエルミート行列で，ともに，すべての固有値が正とする．このとき，ある正の整数 k が存在して $A^k = B^k$ が成り立つならば，$A = B$ であることを示せ．

2 二重実数列 $\{a_{m,n}\}_{m,n=1}^{\infty}$ は次の条件をみたすとする．

$$(*)\ \begin{cases} \text{任意の整数}\, n \geq 1 \,\text{に対して，ある}\, \alpha_n \in \mathbb{R} \,\text{が存在して}\, \displaystyle\lim_{m\to\infty} a_{m,n} = \alpha_n. \\ \text{任意の整数}\, m \geq 1 \,\text{に対して，ある}\, \beta_m \in \mathbb{R} \,\text{が存在して}\, \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{m,n} = \beta_m. \end{cases}$$

以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \alpha_n \neq \lim_{m\to\infty} \beta_m$ となるような $\{a_{m,n}\}_{m,n=1}^{\infty}$ の例を挙げよ．

(2) $\{a_{m,n}\}_{m,n=1}^{\infty}$ が，条件 $(*)$ に加えて，ある $\gamma \in \mathbb{R}$ に対して次の条件をみたすとする．

「任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある整数 $N \geq 1$ が存在して，
$m, n \geq N$ ならば $|a_{m,n} - \gamma| < \varepsilon$ が成り立つ．」

このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \alpha_n$ は存在し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{m\to\infty} \beta_m$ が成り立つことを示せ．

(3) $\{a_{m,n}\}_{m,n=1}^{\infty}$ が，条件 $(*)$ に加えて，次の条件をみたすとする．

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq 1} |a_{m,n} - \alpha_n| = 0.$$

このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \alpha_n$ は存在し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{m\to\infty} \beta_m$ が成り立つことを示せ．

(4) 有界な実数列全体の集合 $X = \{x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \displaystyle\sup_{n\geq 1} |\xi_n| < \infty\}$ に距離

$$d(x, y) = \sup_{n\geq 1} |\xi_n - \eta_n|, \quad x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty},\ y = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$$

を入れた距離空間 (X, d) を考える．このとき，収束する実数列全体のなす X の部分集合 A は X の閉集合であることを示せ．

3 以下の (1) ～ (12) の 12 問のうちから **4** 問を選んで解答せよ．選択した 4 問の番号を答案用紙の所定の欄に記入すること．5 問以上選択した答案は無効とする．

(1) V は $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間で，$\dim V \neq 0$ とする．f, g はともに V から V への線形写像とする．このとき，$f \circ g = g \circ f$ ならば，f と g の両方の固有ベクトルとなるものが存在することを示せ．

(2) $L = \{m + in \in \mathbb{C} \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ として，複素関数項級数 $f(z)$ を

$$f(z) = \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

と定める．このとき，$f(z)$ は $\mathbb{C} \setminus L$ の任意の閉円板上で絶対かつ一様収束することを示せ．ただし，級数

$$\sum_{\substack{\omega \in L \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{\omega^3}$$

が絶対収束することを用いて良い．

(3) 複素平面 $\mathbb{C}$ と上半平面 $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R},\ y > 0\}$ は正則同型 (すなわち，全単射かつ複素微分可能な写像 $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$ で逆写像 φ^{-1} も複素微分可能なものが存在する) か．理由とともに答えよ．

(4) 整数係数一変数多項式環 $\mathbb{Z}[X]$ において，$(2, X^2 + 1)$ は素イデアルか．また，$(2, X + 1)$ は極大イデアルか．それぞれ，理由とともに答えよ．

(5) ～ (12) は次ページ以降にある．

3 （続き）

(5) 次の行列 A と B で生成される $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群 G の位数を求め，また共役類をすべて求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(6) $\mathbb{C}$ 上のリー代数 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の 3 次元既約表現を一つ与え，また既約であることを確かめよ．ここで，$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ とは，生成元 e, f, h とその基本関係式

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h$$

で定まるリー代数のことである．

(7) 閉区間 $[0, 1]$ 上の可測関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x)|\, dx = 0$$

をみたすとき

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad \text{a.e. } x \in [0, 1]$$

は成り立つか．そうならば証明し，そうでなければ反例をあげよ．

(8) 閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数全体の空間 $C[0, 1]$ は，ノルム

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx, \quad f \in C[0, 1]$$

に関して完備か．理由とともに答えよ．

(9) 〜 (12) は次ページにある．

3 （続き）

(9) f, φ, ψ は区間 $[a, b]$ 上で連続で，$\psi(t) \geq 0$ とする．このとき

$$f(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s) f(s)\, ds, \quad a \leq t \leq b$$

ならば

$$f(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)\varphi(s) e^{\int_s^t \psi(s')\, ds'}\, ds, \quad a \leq t \leq b$$

が成り立つことを示せ．

(10) m, n は正の整数で $m \geq n+2$ とする．$\mathbb{R}^n$ を次のように $\mathbb{R}^m$ の部分集合とみなす．

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

このとき，補集合 $X = \mathbb{R}^m \setminus \mathbb{R}^n$ の整係数ホモロジー群を求めよ．

(11) ２次元球面 S^2 の接バンドル TS^2 は自明なベクトルバンドルではないことを説明せよ．ただし，証明なしに用いる定理がある場合は，その内容を明記すること．

(12) $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1,\ x_3 > 0\}$ とおく．$\mathbb{R}^3$ に不定値計量 $g_{++-} = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 - dx_3 \otimes dx_3$ を入れ，それを H に制限した計量を g_H とすれば，これは H 上の正定値計量を定めることを示せ．また，$B = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 < 1\}$ とし，写像 $\varphi : B \to H$ を

$$\varphi(y_1, y_2) = \left(\frac{2y_1}{1 - y_1^2 - y_2^2},\ \frac{2y_2}{1 - y_1^2 - y_2^2},\ \frac{2}{1 - y_1^2 - y_2^2} - 1 \right)$$

により定義する．このとき，写像 φ で g_H を引き戻した B 上の計量 $\varphi^* g_H$ を y_1, y_2 を用いて表せ．