名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００７年度博士課程後期課程入学試験問題

以下の4題の問題すべてに解答せよ．

$\boxed{1}$ V を有限次元の複素ベクトル空間，f を V の線型変換とする．

(1) f が対角化可能であるための必要十分条件は，V が f の固有ベクトルで生成されることであることを証明せよ．ただし，f が対角化可能であるとは，V のある基底に関する f の表現行列が対角行列になることを意味する．

(2) W を V の部分空間で $f(W) \subset W$ となるものとする．f が対角化可能であるとき，以下を示せ．

(i) f から自然に誘導される線型写像 $g : V/W \to V/W$ も対角化可能である．

(ii) f から自然に誘導される線型写像 $g : W \to W$ も対角化可能である．

（２００６年7月２２日）

（次ページあり）

$\boxed{2}$ A を 3 次の複素正方行列とし，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ とおいて，線型常微分方程式系

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) = A\,\boldsymbol{x}(t)$$

を考える．

(1) この線型常微分方程式系のすべての解が $0 \leq t < \infty$ のとき有界だとする．このとき，A の Jordan 標準型として可能な形をすべて求めよ．

(2) この線型常微分方程式系のすべての解が $-\infty < t < \infty$ のとき高々多項式オーダーの増大度を持つとする．このとき，A の Jordan 標準型として可能な形をすべて求めよ．

$\boxed{3}$ 極限

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x\sin x}}$$

の値を求めよ.

$\boxed{4}$

(1) 関数 $f(t)$ は $[0,\pi]$ を含む開区間で C^1 級であるとする．このとき，等式

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(t)\sin\frac{(2n+1)t}{2}\,dt = 0$$

を証明せよ.

(2) 等式

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{2}{t}-\frac{1}{\sin(t/2)}\right)\sin\frac{(2n+1)t}{2}\,dt = 0$$

を証明せよ.

(3) 任意の自然数 n に対して

$$\frac{1}{2}\frac{\sin\{(2n+1)t/2\}}{\sin(t/2)} = \frac{1}{2}+\cos t+\cdots+\cos nt$$

が成立することを用いて，広義積分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

の値を求めよ.

（２００６年7月２２日）　（以上）