名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００５年度博士課程後期課程入学試験問題

必修問題：以下の2題の問題に解答せよ．

$\boxed{1}$ 線型変換 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ の標準基底に関する表現行列を M とし，$x = x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ に対する常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = Mx$$

を考える．このとき，以下の問に答えよ．

(1) この方程式のすべての解が $t \to +\infty$ のときも $t \to -\infty$ のときも有界であるとする．このとき，0 でない定常解が存在することを示せ．ただし，解 $x(t)$ が定常解であるとは，$x(t)$ が t によらないことを意味する．

(2) この方程式が，その成分が t の多項式で表されるような非定常解を持つとする．このとき，$t \to +\infty$ のときも $t \to -\infty$ のときも有界な解は定常解だけであることを示せ．

(3) もし $\mathrm{tr}\,(M) \neq 0$ ならば，$t \to +\infty$ または $t \to -\infty$ のとき有界でないような解が存在することを示せ．

$\boxed{2}$ $u > 0$ に対して x を

$$x = \begin{cases} \sqrt{(u-1) - \log u} & (u > 1) \\ -\sqrt{(u-1) - \log u} & (0 < u \leq 1) \end{cases}$$

で定め，$f(x) = du/dx$ とおく.

(1) $f(0)$ を求めよ.

(2) ガンマ関数 $\Gamma(s)$ を $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$ $(s > 0)$ で定義する．このとき

$$\Gamma(s+1) = s^{s+1} e^{-s} \int_0^\infty u^s e^{-su+s} du \quad (s > 0)$$

が成り立つことを示せ.

(3) $\lim_{s \to \infty} s^{-s-\frac{1}{2}} e^s \, \Gamma(s+1)$ の値を求めよ.

選択問題：以下の３題から１題を選んで解答せよ．

3

(1) 次の整域はその商体の中で整閉か？　整閉なら証明し，整閉でなければその理由を述べよ．

$$\mathbb{C}[X,Y]/(X^2-Y^3)\ ,\quad \mathbb{Z}[X]/(X^2+3)\ .$$

(2) たてベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $(x,y,z\in\mathbb{Z})$ 全体が通常の加法と整数倍についてなす $\mathbb{Z}$-加群を M とし，N を $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ が生成する M の部分 $\mathbb{Z}$-加群とする．N が M の直和因子かどうかを判定せよ．ただし，N が M の直和因子であるとは，M の部分 $\mathbb{Z}$-加群 N' があって $M=N\oplus N'$ となることである．

$\boxed{4}$ $n \in \mathbb{N}, 1 \leq p < \infty$ に対して，$\mathbb{R}^n$ 上の p 乗可積分実数値関数全体を $L^p(\mathbb{R}^n)$，本質的に有界な実数値可測関数全体を $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ と書く．$f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty, \varepsilon > 0$ に対して

$$f_\varepsilon(x) = (\varepsilon\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/\varepsilon} f(y)dy$$

とおく．このとき次の問いに答えよ．

(1) $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ のとき，$\varepsilon \to +0$ で $\|f_\varepsilon - f\|_{L^p} \to 0$ となることを示せ．ただし $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

と定義する．

(2) $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ の場合，$\varepsilon \to +0$ で必ずしも $\|f_\varepsilon - f\|_{L^\infty} \to 0$ とはならないことを示せ．ただし，$f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\|f\|_{L^\infty} := \inf\{M > 0 \,|\, |f(x)| < M \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^n\} \ ,$$

ここで $a.e.$ は「ほとんど至る所」を意味する．

$\boxed{5}$ $SU(3)$ を 3 行 3 列の特殊ユニタリ行列 ($A^*A = I$, $\det A = 1$ を満たす 3 行 3 列の複素行列) のなす群とし，2 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}^3 - \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ 上の同値関係

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\ ,\ \text{s.t.}\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

に関する商位相空間とする．

3 行 3 列の行列とたてベクトルの積で定義される $SU(3)$ の $\mathbb{C}^3$ への作用は，$SU(3)$ の $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ への作用を誘導する．この作用に関して次の問いに答えよ．

(1) $SU(3)$ は $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ に推移的に作用することを示せ．

(2) 行列の区分け $\begin{pmatrix} 1 & {}^t\vec{0} \\ \vec{0} & SU(2) \end{pmatrix} \hookrightarrow SU(3)$ (ただし $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) により $SU(2)$ を $SU(3)$ の部分群とみなして $SU(2)$ の $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ への作用を考える．このとき，$SU(2)$-軌道の位相型をすべて求めよ．

(3) (2) で求めた $SU(2)$-軌道の各位相型に対し，その整数係数ホモロジー群を求めよ．