Macdonald-Koornwinder 多項式

柳田 伸太郎

2023/09/04

数理的学術交流会 @ 大阪公立大学

この資料は https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/index-j.html にあります.

概要

Macdonald 対称多項式や Koornwinder (コーンウィンダー) 多項式といった
Weyl 群対称性を持った多変数 q 直交多項式系は、
それを同時固有函数とする q 差分鏡映作用素を含む作用素環である
二重アフィン Hecke 環を用いてルート系によらない取り扱いができて、
現在では Macdonald-Koornwinder 多項式と総称されます。
今回はこの理論 (Macdonald-Cherednik 理論) の簡単な説明と、
私が現在取り組んでいる課題を紹介します。

1. Macdonald 対称多項式と Koornwinder 多項式

1.1. Schur 多項式 [1/2]

[I.G. Macdonald, 1995, Chapter 1]

- 対称多項式の記号
  - $x = (x_1, \ldots, x_n)$: (可換な) n 変数の組
  - $\mathbb{Z}[x]^{S_n} = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}$: 対称多項式. 自由加群.
  - $P_+ := \{\lambda \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0\} = \{$ 長さ n 以下の分割 $\}$.
- 分割 $\lambda \in P_+$ に対する Schur 多項式 $s_\lambda(x) \in \mathbb{Z}[x]^{S_n}$.
  - 明示的定義:

$$s_\lambda(x) := \frac{\det(x^{\lambda+\delta})}{\det(x^\delta)}, \ \det(x^{\lambda+\delta}) := \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & x_2^{\lambda_1+n-1} & \ldots & x_n^{\lambda_1+n-1} \\ x_1^{\lambda_2+n-2} & x_2^{\lambda_2+n-2} & \ldots & x_n^{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{\lambda_n} & x_2^{\lambda_2} & \ldots & x_n^{\lambda_n} \end{vmatrix}.$$

  - 次の Hermite 内積 (Schur 内積) に関する $\mathbb{C}[x]^{S_n}$ の直交基底をなす.

$$(f,g)_1 := \frac{1}{n!}\int_T \overline{f(x)} g(x) w_1(x)\, dx, \quad w_1(x) := \prod_{1\leq i\neq j\leq n} (1 - x_i/x_j),$$

$$T := \{x \in \mathbb{C}^n \mid |x_1| = \cdots = |x_n| = 1\},\ dx := \textstyle\prod_{i=1}^n dx_i/(2\pi\sqrt{-1}x_i).$$

1.1. Schur 多項式 [2/2]

- 分割 $\lambda \in P_+$ に対して, $s_\lambda(x)$ は三角展開される:
$$s_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} c_{\lambda,\mu} m_\mu, \quad c_{\lambda,\mu} \in \mathbb{Z}.$$
  - $m_\lambda(x) := \sum_{\mu \in S_n.\lambda} x^\mu = \sum_\mu x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}$: 単項対称式.
    $\{m_\lambda(x) \mid \lambda$: 分割 $\}$ も $\mathbb{Z}[x]^{S_n}$ の基底.
  - $\mu \le \lambda :\Leftrightarrow |\mu|_n = |\lambda|_n$ かつ $|\mu|_k \le |\lambda|_k$ $(1 \le k < n)$ $\quad (|\lambda|_k := \sum_{i=1}^k \lambda_i)$
    : ドミナンス順序. $|\mu|_n = |\lambda|_n \ge 6$ なら半順序.
  - 小さい分割 λ に対する Schur 多項式 s_λ:
    $s_{(1)} = m_{(1)}, \quad s_{(2)} = m_{(2)} + m_{(1,1)}, \ s_{(1,1)} = m_{(1,1)},$
    $s_{(3)} = m_{(3)} + m_{(2,1)} + m_{(1^3)}, \ s_{(2,1)} = m_{(2,1)} + 2m_{(1^3)}, \ s_{(1^3)} = m_{(1^3)}.$
- s_λ は次の二条件から一意に定まる:
  - 三角性 $s_\lambda \in m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} \mathbb{C} m_\mu$.
  - 直交性 $(s_\lambda, s_\mu)_1 \propto \delta_{\lambda,\mu}$.

1.2. Jack 多項式 [1/4]

[Macdonald, 1995, §VI.6]

- $J_\lambda(x;\beta) \in \mathbb{C}[x]^{S_n}$: Jack 多項式 ($\lambda$: 分割, $\beta \in \mathbb{C}$: パラメータ)
- 次の二条件から一意に定まる.
  - 三角性 $J_\lambda \in m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} \mathbb{C} m_\mu$.
  - 直交性 $(J_\lambda, J_\mu)_\beta \propto \delta_{\lambda,\mu}$,

$$(f,g)_\beta := \frac{1}{n!}\int_T \overline{f(x)} g(x) w_\beta(x)\, dx, \quad w_\beta(x) := \prod_{i\neq j}(1-x_i/x_j)^\beta.$$

- Schur 多項式の β 変形: $J_\lambda(x;\beta=1) = s_\lambda(x)$.
- 小さい分割 λ に対する Jack 多項式 J_λ:

$$J_{(1)} = m_{(1)}, \quad J_{(2)} = m_{(2)} + \tfrac{2\beta}{1+\beta} m_{(1,1)}, \quad J_{(1,1)} = m_{(1,1)}, \quad J_{(1^3)} = m_{(1^3)},$$
$$J_{(3)} = m_{(3)} + \tfrac{3\beta}{2+\beta} m_{(2,1)} + \tfrac{6\beta^2}{(1+\beta)(2+\beta)} m_{(1^3)}, \quad J_{(2,1)} = m_{(2,1)} + \tfrac{6\beta}{1+2\beta} m_{(1^3)}.$$

- Schur 多項式 $s_\lambda(x) = \det(x^{\lambda+\delta})/\det(x^\delta)$ と違い, $J_\lambda(x;\beta)$ に簡単な明示式は無さそう. (タブロー表示, および頂点作用素/積分表示はある.)

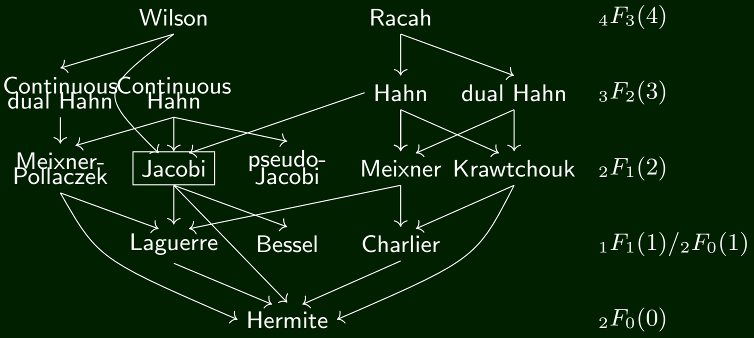
1.2. Jack 多項式 [2/4]

- $J_l(x;\beta)$: 1 変数 Jack 多項式. $(n=1,\ \lambda=l\in P_+=\mathbb{N}:=\mathbb{Z}_{\geq 0})$

  $J_l(x;\beta)\cong$ 等パラメータの Jacobi 多項式 $P_l^{(\alpha=\beta,\beta)}(y)$.

$$P_l^{(\alpha,\beta)}(y):=\frac{(\alpha+1)_l}{l!}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-l,\ l+\alpha+\beta+1\\ \alpha+1\end{matrix};\frac{1-y}{2}\right].$$

- Jacobi 多項式は超幾何直交多項式の Askey 図式に現れる.



1.2. Jack 多項式 [3/4]

- Jack 多項式 $J_\lambda(x;\beta)$ のもう一つの特徴づけ:
  - 三角性 $J_\lambda \in m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} \mathbb{C} m_\mu$.
  - 固有性 $H_{\mathrm{CS}}(\beta) J_\lambda \in \mathbb{C} J_\lambda$,

$$H_{\mathrm{CS}}(\beta) := \sum_{1\le i\le n} \vartheta_i^2 + \beta \sum_{1\le i<j\le n} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j}(\vartheta_i - \vartheta_j), \quad \vartheta_i := x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

$H_{\mathrm{CS}}(\beta) \curvearrowright \mathbb{C}[x]^{S_n}$: Calogero-Sutherland ハミルトニアンと等価.

- 互いに可換な作用素 $O_x^{(1)}(\beta), O_x^{(2)}(\beta) = H_{\mathrm{CS}}(\beta), O_x^{(3)}(\beta), \dots$

$$O_x^{(k)}(\beta) := \sum_{1\le i\le n} D_i^k(\beta), \quad D_i(\beta) := \vartheta_i + \beta \sum_{j\ne i} \frac{x_i}{x_i - x_j}(1 - s_{ij}),$$

$$(s_{ij} f)(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots),$$

に関して, Jack 多項式は同時固有函数である:

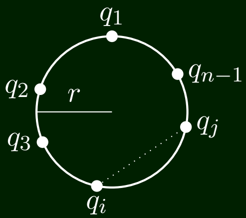
$$O_x^{(k)}(\beta) J_\lambda(x;\beta) = J_\lambda(x;\beta)\epsilon_\lambda^{(k)}, \quad \epsilon_\lambda^{(k)} \in \mathbb{C} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

1.2. Jack 多項式 [4/4]

- Calogero-Sutherland 量子ハミルトニアン

$$H'_{\mathrm{CS}} := \sum_{1\le i\le n} \frac{p_i^2}{2} + \sum_{1\le i<j\le n} \frac{\hbar^2\beta(\beta-1)}{\sin^2 \frac{1}{2r}(q_i-q_j)}$$

$$q_i \in \mathbb{R}/2\pi r\mathbb{R}, \quad p_i = -\sqrt{-1}\hbar\frac{\partial}{\partial q_i}, \quad \beta\in\mathbb{R}$$



半径 r の円周上にある相互作用 $\propto$ (距離)$^{-2}$ の n 粒子量子系.

- H'_{CS} [B. Sutherland, 1971] は Calogero-Moser 古典可積分系 [F. Calogero, 1969; J. Moser, 1975] の量子化を与える.
- H'_{CS} はエネルギー $E_0>0$ の基底状態 $|\psi_0\rangle$ を持つ.

$$\psi_0(q) \propto \prod_{i<j}\Big(\sin\frac{q_i-q_j}{2r}\Big)^{\beta} = \prod_i x_i^{-\frac{\beta(n-1)}{2}} \prod_{i<j}(x_i-x_j)^{\beta}, \quad x_i := e^{\frac{\sqrt{-1}q_i}{r}}.$$

H_{CS} との関係：$\psi_0^{-1} H'_{\mathrm{CS}}\psi_0 = \frac{2r^2}{\hbar^2}(H_{\mathrm{CS}}+E_0)$.
H_{CS} の Hilbert 空間は $\mathbb{C}[x]^{S_n}$.

1.3. Macdonald 対称多項式 [1/3]

- Ruijsenaars 作用素: 楕円函数係数の q 差分作用素族 $(r = 1, \ldots, n)$

  [S.N.M. Ruijsenaars (ルイセナース/ラーセナース), 1987]

$$D_x^{(r)}(q,t,p) := \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ |I|=r}} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \frac{\theta(tx_i/x_j;p)}{\theta(x_i/x_j;p)} \prod_{i \in I} T_{q,x_i}.$$

  - $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$: 変数.
  - $T_{q,x_i} f(x) := f(x_1, \ldots, qx_i, \ldots, x_n)$: q シフト作用素. $(q \in \mathbb{C}, |q| < 1)$
  - $\theta(z;p)$: Jacobi テータ函数. $(p \in \mathbb{C}, |p| < 1)$

$$\theta(z;p) := (z;p)_\infty (p/z;p)_\infty, \quad (z;p)_\infty := \textstyle\prod_{i=0}^\infty (1 - p^i z).$$

  互いに可換: $[D_x^{(r)}, D_x^{(s)}] = 0$.

- 楕円 Macdonald 対称函数: $\{D_x^{(r)}\}_{r=1}^n$ の同時固有函数.
  - 最近進展があった. [E. Langmann・野海・白石, 2022]

1.3. Macdonald 対称多項式 [2/3] [I.G. Macdonald, around 1987]

- Macdonald-Ruijsenaars 作用素: Ruijsenaars 作用素の三角極限

$$D_x^{(r)}(q,t) := \lim_{p\to 0} D_x^{(r)}(q,t,p) = \sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ |I|=r}} \prod_{\substack{i\in I\\ j\notin I}} \frac{1-tx_i/x_j}{1-x_i/x_j} \prod_{i\in I} T_{q,x_i}.$$

- $[D_x^{(r)}(q,t), D_x^{(s)}(q,t)] = 0$ かつ $D_x^{(r)}(q,t) \curvearrowright \mathbb{C}[x]^{S_n}$.
- $\mathbb{C}[x]^{S_n}$ の基底 $\{P_\lambda(x;q,t) \mid \lambda$: 長さ n 以下の分割 $\}$ で
  - 三角性 $P_\lambda \in m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} \mathbb{C} m_\mu$
  - 固有性 $D_x^{(r)}(q,t) P_\lambda(x) = P_\lambda(x) e_r(q^\lambda t^\delta)$

  となるものが一意存在. $P_\lambda(x;q,t)$ が Macdonald 対称多項式.
- もう一つの特徴づけ:
  - 三角展開 $P_\lambda \in m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} \mathbb{C} m_\mu$.
  - 直交性 $(P_\lambda, P_\mu)_{q,t} \propto \delta_{\lambda,\mu}$,

$$(f,g)_{q,t} := \frac{1}{n!}\int_T \overline{f(x)} g(x) w(x)\, dx,\ w(x) := \prod_{i\neq j} \frac{(x_i/x_j;q)_\infty}{(tx_i/x_j;q)_\infty}.$$

1.3. Macdonald 対称多項式 [3/3]

- 小さい分割 λ に対する Macdonald 対称多項式 P_λ:

$$P_{(1)} = m_{(1)}, \quad P_{(2)} = m_{(2)} + \frac{(1+q)(1-t)}{1-qt} m_{(1,1)}, \quad P_{(1,1)} = m_{(1,1)},$$
$$P_{(3)} = m_{(3)} + \frac{(1-q^3)(1-t)}{(1-q)(1-q^2t)} m_{(2,1)} + \frac{(1-q^2)(1-q^3)(1-t)^2}{(1-q)^2(1-qt)(1-q^2t)} m_{(1^3)},$$
$$P_{(2,1)} = m_{(2,1)} + \frac{(1-t)(2+q+t+2qt)}{(1-qt^2)} m_{(1^3)}, \quad P_{(1^3)} = m_{(1^3)}.$$

- パラメータ特殊化・極限で Schur 多項式や Jack 多項式を復元:
  - $P_\lambda(q, t = q) = s_\lambda$.
  - $\lim_{q \to 1} P_\lambda(q, t = q^\beta) = J_\lambda(\beta)$.
- 安定極限 (無限変数版) がある: Macdonald 対称函数.
  q 差分作用素 $\{D^{(r)}\}_{r=1}^\infty$ の安定極限もあり、それは $\mathfrak{gl}_1$ 量子トロイダル代数 (Ding 庵原三木代数) の可換部分代数をなす。

1.4. Askey-Wilson 多項式 [1/3] [R. Askey, J. Wilson, 1985]

Askey-Wilson 多項式: 1 変数 q 直交多項式 p_l $\quad (l \in \mathbb{N},\ \nu(x) := \frac{x+x^{-1}}{2})$

$$p_l(\nu(x); a, b, c, d|q) := \frac{(ab, ac, ad; q)_l}{a^l}\, {}_4\phi_3\left[\begin{matrix} q^{-l},\ q^{l-1}abcd,\ ax,\ a/x \\ ab,\ ac,\ ad \end{matrix}; q,\ q\right].$$

$${}_4\phi_3\left[\begin{matrix} a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 \\ b_1,\ b_2,\ b_3 \end{matrix}; q,\ z\right] := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a_1, a_2, a_3, a_4; q)_i}{(q, b_1, b_2, b_3; q)_i} z^i, \quad (a; q)_i := \prod_{j=0}^{i}(1 - q^j a).$$

直交性: $\quad (x = e^{i\theta},\ y = \nu(x) = \cos\theta)$

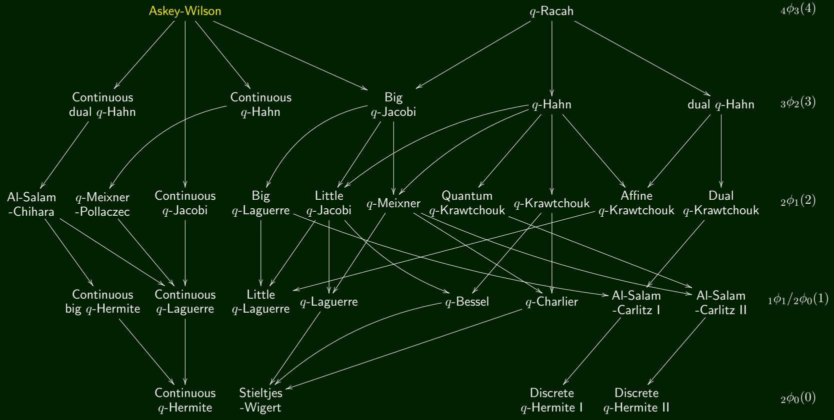
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} p_l(y) p_m(y) \frac{w(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy = h_l \delta_{l,m}, \quad w(y) := \left|\frac{(x^2; q)_\infty}{(ax, bx, cx, dx; q)_\infty}\right|^2,$$

$$h_l = \frac{(q^{l-1}abcd; q)_l (q^{2l}abcd; q)_\infty}{(q^{l+1}, q^l ab, q^l ac, q^l bc, q^l bd, q^l cd; q)_\infty}.$$

1.4. Askey-Wilson 多項式 [2/3]

- Askey-Wilson 多項式は q-Askey 図式の一行目に属する.

$$p_l(\cos\theta; q, a, b, c, d) \propto {}_4\phi_3\left[\begin{matrix} q^{-l},\ q^{l-1}abcd,\ ae^{i\theta},\ ae^{-i\theta} \\ ab,\ ac,\ ad \end{matrix}; q,\ q\right].$$



1.4. Askey-Wilson 多項式 [3/3]

Askey-Wilson 多項式: $(\nu(z) := (z + z^{-1})/2)$

$$p_l(\nu(z); q, a, b, c, d) := \frac{(ab, ac, ad; q)_l}{a^l} {}_4\phi_3\left[\begin{matrix} q^{-l},\ q^{l-1}abcd,\ az,\ az^{-1} \\ ab,\ ac,\ ad \end{matrix}; q,\ q\right].$$

- 変数対称性: $z \leftrightarrow z^{-1}$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{\pm 1\}$ 作用で p_n は不変.
- 2 階 q 差分作用素の固有函数: $(Dp_l)(z) = c_l p_l(z)$,

$$D := \Phi(z)(T_{q,z} - 1) + \Phi(z^{-1})(T_{q,z}^{-1} - 1), \quad (T_{q,z}f)(z) = f(qz),$$

$$\Phi(z) := \frac{(1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz)}{(1-z^2)(1-qz^2)},\ c_l := (q^{-l} - 1)(1 - q^{l-1}abcd).$$

- スペクトル対称性: $\zeta_l \leftrightarrow \zeta_l^{-1}$ の $\{\pm 1\}$ 作用で c_l, p_l は不変.

$$c_l = -(1 - a^*\zeta_l)(1 - a^*\zeta_l^{-1}),\ a^* := \sqrt{abcd/q},\ \ \zeta_l := q^{-l}/a^*,$$

$$p_l \propto p(z; \zeta_l),\ \ p(z;\zeta) := {}_4\phi_3\left[\begin{matrix} a^*\zeta,\ a^*/\zeta,\ az,\ a/z \\ ab,\ ac,\ ad \end{matrix}; q,\ q\right].$$

- 双スペクトル性 (双対性): $z \leftrightarrow \zeta$ の対称性.

1.5. Koornwinder 多項式 [1/4]

[T.H. Koornwinder, 1992]

Koornwinder 多項式: Askey-Wilson 多項式の n 変数版.

- $\mathbb{C}[x^{\pm 1}] = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$: n 変数 Laurent 多項式環.
  - $\mathbb{C}[x^{\pm 1}] \cong \mathbb{C}P$: C_n 型ウェイト格子 $P = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\epsilon_i$ の群環.
    $x^\lambda := x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$ ($\lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k \epsilon_k \in P$: ウェイト).
- $W := \langle \lambda_k \mapsto -\lambda_k, \text{番号置換} \rangle \curvearrowright P, \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$.
  $W \cong \{\pm 1\}^n \rtimes S_n$: BC_n 型 Weyl 群.
- $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]^W := \{f \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}] \mid w(f) = f, \forall w \in W\}$: W 不変式環.
  $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]^W = \bigoplus_{\lambda \in P_+} \mathbb{C} m_\lambda(x)$,
  $P_+ := \{\lambda \in \mathbb{N}^n \mid \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n\}$: 分割, $m_\lambda(x) := \sum_{\mu \in W\lambda} x^\mu$.
  - $n = 1$: $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}]^W = \mathbb{C}[x_1 + x_1^{-1}] = \bigoplus_{l \in \mathbb{N}} \mathbb{C} m_l$, $m_l = x_1^l + x_1^{-l}$.

- (a, b, c, d, t), q: generic な複素数.
  次の (1) と (2), または (1) と (3) を満たす W 不変式環 $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]^W$ の基底 $\{P_\lambda(x) = P_\lambda(x; q, a, b, c, d, t) \mid \lambda \in P_+\}$ が一意存在.

1.5. Koornwinder 多項式 [2/4]

- (a,b,c,d,t), q: generic な複素数. 次の (1) と (2) を満たす $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]^W$ の基底 $\{P_\lambda(x) \mid \lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k \epsilon_k \in P_+\}$ が一意存在.
  (1) 三角性: $P_\lambda(x) = m_\lambda(x) + \sum_{\mu<\lambda} c_{\lambda\mu} m_\mu(x)$.
  (2) 固有性: $DP_\lambda(x) = c_\lambda P_\lambda(x)$,

$$D := \sum_{k=1}^n \Phi_k(x)(T_{q,x_k} - 1) + \sum_{k=1}^n \Phi_k(x^{-1})(T_{q,x_k}^{-1} - 1),$$

$$\Phi_k^+(x) := \frac{(1-ax_k)(1-bx_k)(1-cx_k)(1-dx_k)}{(1-x_k^2)(1-qx_k^2)} \times \prod_{j\neq k} \frac{(1-tx_k/x_j)(1-tx_kx_j)}{(1-x_k/x_j)(1-x_kx_j)},$$

$$(T_{q,x_k}f)(x) := f(x_1,\ldots,qx_k,\ldots,x_n),$$

$$c_\lambda = \sum_{k=1}^n (q^{-\lambda_k} - 1)(t^{k-1} - q^{\lambda_k - 1} t^{2n-k-1} abcd).$$

1.5. Koornwinder 多項式 [3/4]

- (a, b, c, d, t): 絶対値 1 未満の実数, q: $0 < q < 1$. 次の (1) と (3) を満たす $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]^W$ の基底 $\{P_\lambda(x) \mid \lambda \in P_+\}$ が一意存在.
  (1) 三角性: $P_\lambda(x) = m_\lambda(x) + \sum_{\mu < \lambda} c_{\lambda\mu} m_\mu(x)$.
  (3) 直交性: $\langle P_\lambda, P_\mu \rangle = 0$ ($\lambda, \mu \in P_+$, $\lambda \neq \mu$),

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{|W|} \int_T \overline{f(x)} g(x) \left| \Delta^+(x) \right|^2 \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \frac{dx_1 \cdots dx_n}{x_1 \cdots x_n},$$

$$T := \{x \in \mathbb{C}^n \mid |x_1| = \cdots = |x_n| = 1\},$$

$$\Delta^+(x) := \prod_{k=1}^{n} \frac{(x_k^2; q)_\infty}{(ax_k, bx_k, cx_k, dx_k; q)_\infty} \times \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{(x_j/x_k, x_j x_k; q)_\infty}{(tx_j/x_k, tx_j x_k; q)_\infty}.$$

1.5. Koornwinder 多項式 [4/4]

Koornwinder 多項式 $P_\lambda(x) = P_\lambda(x; q, a, b, c, d, t)$ の性質:

- $n = 1$ の場合は Askey-Wilson 多項式と一致.
- van Dijen (1995) の q 差分作用素可換族
  $D_x^{(1)} = D, D_x^{(2)}, D_x^{(3)}, \dots,$

$$D_x^{(r)} = \sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,n\},|J|=r \\ \varepsilon_j=\pm 1, j\in J}} \sum_{\substack{\emptyset\subset J_0\subsetneq\cdots\subsetneq J_s=J \\ 0\le s\le r}} \prod_{0\le s'\le s} V_{\varepsilon(J_{s'}\setminus J_{s'-1});J_{s'}^c} \cdot T_{q,x}^{J_0},$$

$$[D_x^{(r)}, D_x^{(s)}] = 0,$$

  の同時固有函数: $D_x^{(r)} P_\lambda(x) = c_{r,\lambda} P_\lambda(x)$.
- Askey-Wilson 多項式は q 超幾何 ${}_4\phi_3$ で明示できるが,
  Koornwinder 多項式の "良い" 明示式はまだ知られていない様子.

Koornwinder や van Dijen の研究は,
Macdonald 多項式の理論の $(\mathrm{C}^\vee, \mathrm{C})$ 型類似とみなせる.

2. Macdonald-Koornwinder 多項式と二重アフィン Hecke 環

2.1. Macdoanld-Cherednik 理論の概要 [1/4]

[Macdonald, 1987 頃; I. Cherednik, 1992–95; 野海正俊, 1995;
S. Sahi, 1998; Macdonald, 2003; J.V. Stokman, 2000, 2011, 2014; ...]

Macdonald 対称多項式や Koornwinder 多項式はアフィン Hecke 環の表現を用いて統一的に扱える.

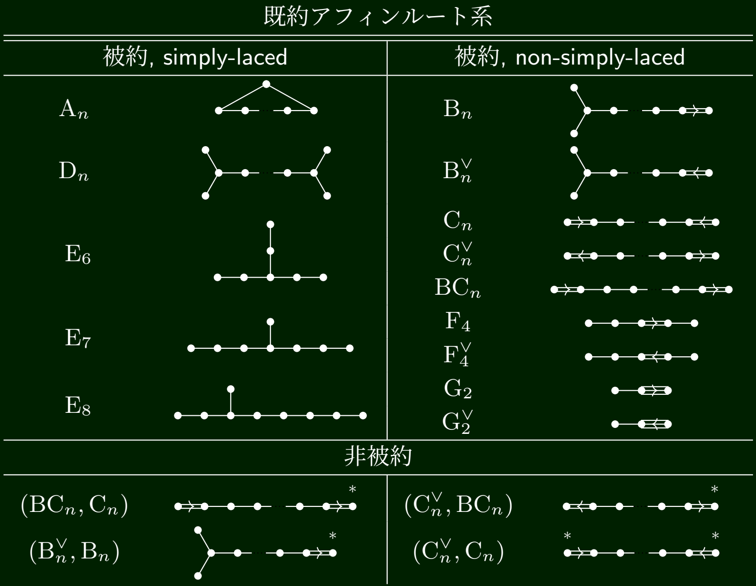
- 1987 年頃, Macdonald が Weyl 群対称性を持つ多変数 q 直交多項式系を導入.
- 1990 年前後, 当時研究が進んでいた量子群の表現論において, Macdonald 多項式のパラメータ特殊化の一部が行列要素で実現された (球函数の q 類似).
- しかし, 任意パラメータの場合を量子群で実現することができなかった.
  $\rightarrow$ Cherednik のアイデア: qKZ 方程式とアフィン Hecke 環を使う.
- 一方, 1992 年に Koornwinder が Askey-Wilson 多項式の多変数化を導入.
- 1995 年に野海が C 型アフィン Hecke 環の新しい表現 (基本表現) を導入し, Koornwinder 多項式がその基底であることを証明.
- 1998 年に Sahi が Macdonald (1972) の意味での非被約なアフィンルート系について Cherednik の議論を拡張.
- 2003 年の Macdonald の本で被約 (Cherednik) と非被約 (野海, Sahi) を統合.
- 少し不備があって, Stokman が 2011 年に修正.

2.1. Macdonald-Cherednik 理論の概要 [2/4]

Macdonald-Cherednik 理論の概要: [Macdonald, 2003; Stokman, 2011]

- ある条件を満たすアフィンルート系の組 (S, S') に適用可.
  - Macdonald (1972) の意味でのアフィンルート系. (次頁参照)
- 組 (S, S') は 3 つのクラスに分かれる:
  - (I) $(S, S') = (S(R), S(R^\vee))$, R: 既約有限ルート系.
  - (II) $S = S' = S(R)^\vee$, R: 既約有限ルート系.
  - (III) $S = S'$: 被約でないアフィンルート系, (X, Y) 型.
- Macdonald 対称多項式 (の A_n 型版) は (I) または (II) の $S = S' = S(\mathrm{A}_n)$ に対応.
- Koornwinder 多項式は (III) の $(\mathrm{C}_n^\vee, \mathrm{C}_n)$ 型.

2.1. Macdonald-Cherednik 理論の概要 [3/4]



2.1. Macdonald-Cherednik 理論の概要 [4/4]

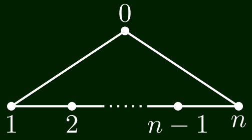
アフィンルート系の組 (S, S') が与えられると, 以下の構成ができる:

- 拡大アフィン Weyl 群 $W_{\mathrm{ex}} := W \ltimes L'$
  (W は S に由来する有限 Weyl 群, L' は S' 由来の格子)
- 拡大アフィン Hecke 環 $H(W_{\mathrm{ex}})$.
  $H(W_{\mathrm{ex}}) \curvearrowright \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$: 鏡映・$q$ 差分作用素実現 (基本表現).
- q-Dunkl 作用素 Y_i
  $\rightsquigarrow$ Macdonald 作用素 $f(Y_i) \curvearrowright \mathbb{C}[x^{\pm 1}]^W$. ($f \in \mathbb{C}[Y^{\pm 1}]^W$)
- 三角性と同時固有性を持つ $\mathbb{C}[x^{\pm 1}]^W$ の基底が一意存在.
  $\rightsquigarrow$ Macdonald-Koornwinder 多項式 $P_\lambda(x; q, t_*)$.
  - λ は "優整ウェイト" $L'_+ \subset L'$ を走る.
  - (t パラメータの数) = (アフィンルート系 S の W_{ex} 軌道の数).
    A,D,E: t; B,C,F,G: t_l, t_s; BC: t_l, t_m, t_s;
    $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$: $t_0, t_0^\vee, t_1, t_1^\vee$; $(\mathrm{C}_n^\vee, \mathrm{C}_n)$: $t, t_0, t_0^\vee, t_n, t_n^\vee$ ($n \geq 2$).
  - $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型 Macdonald-Koornwinder 多項式 = Askey-Wilson 多項式は t パラメータを 4 個もつ (前述の a, b, c, d).

2.2. A 型の場合 (Macdonald 対称多項式) [1/2]

- $W = W(\mathrm{A}_{n-1}) = S_n = \langle s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle_{\mathsf{grp}}$: 有限 Weyl 群
  $\subset \mathrm{W_{aff}}(\mathrm{A}_{n-1}) := Q \rtimes W = \langle s_0, \ldots, s_{n-1} \rangle_{\mathsf{grp}}$: アフィン Weyl 群
  $Q := \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}\alpha_i$, $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$: ルート格子
  $\subset W_{\mathrm{ex}} = W_{\mathrm{ex}}(\mathrm{A}_{n-1}) := P \rtimes W = \langle s_0, \ldots, s_{n-1}, \omega \rangle_{\mathsf{grp}}$
  $P := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\varepsilon_i$: ウェイト格子
- 拡大アフィン Weyl 群 W_{ex} の基本関係式

$$\begin{cases} s_i^2 = 1 & (i = 0, \ldots, n-1) \\ s_i s_j = s_j s_i & (|i-j| > 1) \\ s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & (|i-j| = 1) \\ \omega s_i = s_{i-1}\omega & (i = 0, \ldots, n-1) \end{cases}$$



- $\mathrm{W_{aff}} = \langle s_0, \ldots, s_{n-1} \rangle_{\mathsf{grp}} \curvearrowright \mathbb{C}(x) = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$,
  $s_i : x_i \leftrightarrow x_{i+1}\ (i \geq 1)$, $s_0 : x_1 \mapsto q x_n, x_n \mapsto q^{-1} x$.

2.2. A 型の場合 (Macdonald 対称多項式) [2/2]

- Demazure-Lusztig 作用素 $T_i \curvearrowright \mathbb{C}(x)$: 鏡映・$q$ 差分作用素.

$$T_i := t^{-1/2}\frac{1-tx^{\alpha_i}}{1-x^{\alpha_i}}s_i + \frac{t^{1/2}-t^{-1/2}}{1-x_i^{\alpha}} \quad (i=0,\dots,n-1),$$

  $x^{\alpha_i} = x^{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}} := x_i/x_{i+1}$ $(i \geq 1)$, $x^{\alpha_0} = x^{\delta}x^{\varepsilon_n-\varepsilon_1} := qx_n/x_1$.
  T_i 達と $\widetilde{\omega} := s_{n-1}\cdots s_1 T_{q,x_1}$ は拡大アフィン Hecke 環 $H(W_{\mathrm{ex}})$ を生成.
- $H(W_{\mathrm{ex}}) \curvearrowright \mathbb{C}[x^{\pm1}]$: 拡大アフィン Hecke 環の基本表現.
- q-Dunkl 作用素 $Y_i \in H(W_{\mathrm{ex}})$:

$$Y_1 := T_1T_2\cdots T_{n-1}\widetilde{\omega}, \quad Y_2 := T_2\cdots T_{n-1}\widetilde{\omega}T_1^{-1}, \ \dots, \ Y_n := \widetilde{\omega}T_1^{-1}\cdots T_{n-1}^{-1}.$$

  中心は $Z\big(H(W_{\mathrm{ex}})\big) = \mathbb{C}[Y_1,\dots,Y_n]$ [J. Bernstein].
- Macdonald-Ruijsenaars 作用素 $D_x^{(r)}$ は Y_i 達の基本対称式:

$$D_x^{(r)} = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_r\leq n} Y_{i_1}\cdots Y_{i_r} = e_r(Y) \curvearrowright \mathbb{C}[x^{\pm1}]^{S_n}.$$

  つまり, $H(W_{\mathrm{ex}})$ の基本表現から A 型 Macdonald 多項式が定まる.

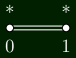
2.3. $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型の場合 (Askey-Wilson 多項式) [1/4]

$(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型アフィンルート系 S [Macdonald (2003), 6.4–6.6]

- $V = \mathbb{R}\epsilon$, $\langle \epsilon, \epsilon \rangle = 1$: 1 次元実 Euclid 空間,
  $F := \{V \to \mathbb{R} \mid \text{affine-linear}\} \xleftarrow{\sim} V \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{D} V$, $\langle v, \cdot \rangle + r \leftarrow\!\shortmid v + r \mapsto v$
- $F \supset S := \{\pm\epsilon + \frac{1}{2}r, \pm 2\epsilon + r \mid r \in \mathbb{Z}\} \ni a_1 := \epsilon, a_0 := -\epsilon + \frac{1}{2}$.
  $S \supset \{\pm\epsilon + \frac{1}{2}r \mid r \in \mathbb{Z}\}$ は C_1 型アフィンルート系.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on F: $\langle a, b \rangle := \langle Da, Db \rangle$ for $a, b \in F$.
  For $a \in S$, $a^\vee := 2a / \langle a, a \rangle \in S$. $a_1^\vee = 2a_1$, $a_0^\vee = 2a_0$.
  $S \supset \{\pm 2\epsilon + r \mid r \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathrm{C}_1^\vee$ 型アフィンルート系.
- For $a \in S$, $s_a \colon V \to V$, $x \mapsto x - a^\vee(x) \cdot Da$.
  $H_a := a^{-1}(0) \subset V$ に関する鏡映.
  - $s_1 := s_{a_1}$: $x \mapsto x - a_1^\vee(x) \cdot Da_1 = x - 2\langle \epsilon, x \rangle \cdot \epsilon = -x$.
    $H_1 := H_{a_1} = a_1^{-1}(0) = \{0\}$ に関する鏡映.
  - $s_0 := s_{a_0}$: $x \mapsto x - a_0^\vee(x) \cdot Da_0 = x - 2(\langle -\epsilon, x \rangle + \frac{1}{2}) \cdot (-\epsilon) = \epsilon - x$.
    $H_0 := H_{a_0} = a_0^{-1}(0) = \{\frac{1}{2}\epsilon\}$ に関する鏡映.

2.3. $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型の場合 (Askey-Wilson 多項式) [2/4]

$(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型アフィンルート系



- $S = \{\pm\epsilon + \frac{1}{2}r, \pm 2\epsilon + r \mid r \in \mathbb{Z}\} \subset F \cong V \oplus \mathbb{R}$,
- $a_1 = \epsilon, a_1^\vee = 2a_1, a_0 = -\epsilon + \frac{1}{2}, a_0^\vee = 2a_0 \in S$,
  $s_1 = s_{a_1}, s_0 = s_{a_0} \colon V \to V$, $s_1(x) = -x$, $s_0(x) = \epsilon - x$.

S の (拡大) アフィン Weyl 群 $\widetilde{W} = W_{\mathrm{ex}} = \mathrm{W}_{\mathrm{aff}}$:

- $\widetilde{W} \coloneqq \langle s_a \, (a \in S) \rangle_{\mathsf{grp}} \subset \mathrm{Isometry}(V = \mathbb{R}\epsilon, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.
- $\widetilde{W} = \langle s_0, s_1 \rangle_{\mathsf{grp}} \cong \left\langle s_0, s_1 \mid s_0^2, s_1^2 \right\rangle_{\mathsf{grp}}$.
- $\widetilde{W} = W \ltimes t(L'), \;\; W \coloneqq \langle s_1 \rangle_{\mathsf{grp}} \cong \{\pm 1\} = W(\mathrm{C}_1)$,
  $t(L') \coloneqq \{t(\lambda) \colon x \mapsto x + \lambda \mid \lambda \in L' = Q^\vee_{\mathrm{C}_1} = \mathbb{Z}\epsilon\}$.
  $\widetilde{W} = \langle s_1, t(\epsilon) \rangle_{\mathsf{grp}}, \;\; t(\epsilon) = s_0 s_1$. $\qquad s_0 s_1(x) = s_0(-x) = \epsilon - (-x) = x + \epsilon$.

$\widetilde{W} \curvearrowright F$: $s_a(f) = f - \langle a^\vee, f \rangle a$. この作用は $S \subset F$ を保つ.

- $\widetilde{W}$ 軌道分解: $S = O_1 \sqcup O_1^\vee \sqcup O_0 \sqcup O_0^\vee$,
  $O_1 = \pm\epsilon + \mathbb{Z}, \quad O_1^\vee = 2O_1, \quad O_0 = O_1 + \frac{1}{2}, \quad O_0^\vee = 2O_0 = O_1^\vee + 1$.
- $a_i \in O_i$, $a_i^\vee \in O_i^\vee$ $(i = 1, 0)$

2.3. $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型の場合 (Askey-Wilson 多項式) [3/4]

$S = \{\pm\epsilon + \frac{1}{2}r, \pm 2\epsilon + r \mid r \in \mathbb{Z}\} \ni a_1 = \epsilon,\ a_1^\vee = 2a_1,\ a_0 = -\epsilon + \frac{1}{2},\ a_0^\vee = 2a_0.$
$\widetilde{W} = \langle s_0, s_1 \mid s_0^2, s_1^2 \rangle_{\mathsf{grp}} = \langle s_1, t(\epsilon) \rangle_{\mathsf{grp}}, \quad t(\epsilon) = s_0 s_1.$
$\widetilde{W} \curvearrowright S = O_1 \sqcup O_1^\vee \sqcup O_0 \sqcup O_0^\vee, \quad a_i \in O_i,\ a_i^\vee \in O_i^\vee \quad (i = 1, 0).$

$\mathbb{K} := \mathbb{C}(q^{1/2}, \tau_1, \tau_0, \tau_1^\vee, \tau_0^\vee).$

各 $\widetilde{W}$ 軌道に τ パラメータが対応: $\tau_i \leftrightarrow O_i,\ \tau_i^\vee \leftrightarrow O_i^\vee.$

アフィン Hecke 環 $H(\widetilde{W})$: $\mathbb{K}$ 代数, 群環 $\mathbb{K}\widetilde{W}$ の変形.

- 生成元: T_1, T_0. 群環の s_1, s_0 に対応.
- 関係式: $(T_i - \tau_i)(T_i + \tau_i^{-1}) = 0$ $(i = 0, 1)$. 群環の $s_i^2 = 1$ に対応.

定理 [被約ルート系の場合は Bernstein (unpublished); Lusztig, 1989]
中心 $Z(H(\widetilde{W})) = \mathbb{K}[Y + Y^{-1}]$, $Y := T_0 T_1$: q-Dunkl 作用素.
Y は群環の $t(\epsilon) = s_0 s_1$ に対応.

2.3. $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型の場合 (Askey-Wilson 多項式)　[4/4]

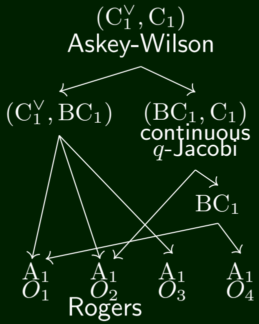
$$\mathbb{K} := \mathbb{C}(q^{1/2}, \tau_1, \tau_0, \tau_1^\vee, \tau_0^\vee), \ \ H(\widetilde{W}) = \langle T_1, T_0 \mid (T_i - \tau_i)(T_i + \tau_i^{-1}) \ (i = 0, 1) \rangle.$$

- <u>定理</u>　$[(\mathrm{C}_n^\vee, \mathrm{C}_n)$ 型でも可: 野海, 1995]　　$L' = Q_{C_1}^\vee = \mathbb{Z}\epsilon$, $x = e^\epsilon$.
  $H(\widetilde{W})$ の基本表現 $\rho_{q,\tau,\tau'} : H(\widetilde{W}) \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}} A$,　$A := \mathbb{K}L' = \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$,
  $$T_i \longmapsto b_i(x_i) + c_i(x_i) s_i \quad (i = 1, 0),$$
  $$x_1 := x, \ x_0 := q^{\frac{1}{2}} x^{-1}, \quad (s_1 f)(x) := f(x^{-1}), \ (s_0 f)(x) := f(q x^{-1}),$$
  $$b_i(z) := \frac{1}{1 - z^2}\big((\tau_i - 1/\tau_i) + (\tau_i^\vee - 1/\tau_i^\vee) z\big), \ c_i(z) := \tau_i - b_i(z).$$
  更に $W = \langle s_1 \rangle_{\mathsf{grp}} \curvearrowright A$, $s_1(x) = x^{-1}$;　$A_0 := A^W = \mathbb{K}[x + x^{-1}]$.

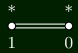
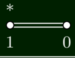
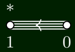
- <u>定理</u>　$[(\mathrm{C}_n^\vee, \mathrm{C}_n)$ 型でも可: 野海, 1995]　　$m_l = x^l + x^{-l}$.
  A_0 の基底 $\{P_l \mid l \in \mathbb{N}\}$ で以下を満たすものが一意存在:
  (三角性)　$P_l = m_l + \text{lower}$,　　(固有性)　$(Y + Y^{-1}) P_l = (\text{eigen}) P_l$.
  更に $P_l(x) = (l$ 次 Askey-Wilson 多項式$)$.
  但し $(a, b, c, d) = (\tau_1 \tau_1^\vee, -\tau_1/\tau_1^\vee, q^{1/2} \tau_0 \tau_0^\vee, -q^{1/2} \tau_0/\tau_0^\vee)$.

2.4 補足 [1/2]

- 部分ルート系を反映した特殊化図式 [山口航平-Y., 2022]
  - q-Askey スキームはアフィンルート系の話を反映していない $\cdots$
  - $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ アフィンルート系 S には自然な部分アフィンルート系があって，右のようになる.
    (各矢印は，行き先が出発の部分ルート系であることを意味する.)
  - これと合的な Askey-Wilson 多項式のパラメータの特殊化をまとめたのが次頁の表.



2.4. 補足 [2/2]

型	Dynkin 図形	Weyl 群軌道	t パラメータ			
$(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ Askey-Wilson		$O_1 \sqcup O_1^\vee \sqcup O_0 \sqcup O_0^\vee$	τ_1	$\tau_1^\vee$	τ_0	$\tau_0^\vee$
$(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{BC}_1)$		$O_1 \sqcup O_1^\vee \sqcup O_0$	t_s	$t_s t_l$	t_s	t_s/t_l
$(\mathrm{BC}_1, \mathrm{C}_1)$ cont. q-Jacobi		$O_1 \sqcup O_1^\vee \sqcup O_0^\vee$	t_l^2	$t_s t_l$	1	t_s/t_l
BC_1		$O_1 \sqcup O_0^\vee$	t_l^2	t_s	1	t_s
A_1 Rogers		O_1	1	t	1	t
		O_3	t	1	t	1
		O_2	1	t^2	1	1
		O_4	t^2	1	1	1

3. Askey-Wilson 代数

1. Macdonald 対称多項式と Koornwinder 多項式
2. Macdonald-Cherednik 理論
3. Askey-Wilson 代数　[12 頁]
   - 3.1. $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型 DAHA
   - 3.2. Askey-Wilson 代数
   - 3.3. 幾何学的 Riemann-Hilbert 対応の量子化

3.1. $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型 DAHA (二重アフィン Hecke 環) [1/3]

- $\mathbb{K} := \mathbb{C}(q^{1/2}, \tau_1, \tau_1', \tau_0, \tau_0')$,
  $H = H(\widetilde{W}) := \langle T_1, T_0 \mid (T_i - \tau_i)(T_i + \tau_i^{-1})\ (i = 0, 1) \rangle_{\mathbb{K}\text{-alg}}$.
  $Z(H) = \mathbb{K}[Y + Y^{-1}]$, $Y := T_0 T_1$: q-Dunkl 作用素.
  $\rho_{q,\tau,\tau'} \colon H \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$, $T_i \mapsto b_i(x_i) s_i + c_i(x_i)$: 基本表現.
- $H = \langle T_1, Y \rangle_{\mathsf{alg}} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$, $\mathbb{K}$ 加群として $H \cong \mathbb{K}[T_1] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]$.
- 二重アフィン Hecke 環 $\mathbb{H}$ [被約: Cherednik, 1990s; 非被約: Sahi, 1998]
  $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\widetilde{W}) := \left\langle X^{\pm 1}, T_1, Y \right\rangle_{\mathsf{alg}} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$. $X := x \cdot -$.
  - $\mathbb{K}$ 加群として $\mathbb{H} \cong \mathbb{K}[X^{\pm 1}] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[T_1] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]$.
  - Cherednik 対合 $\omega \colon \mathbb{H}(\widetilde{W}) \to \mathbb{H}(\widetilde{W})$: $\mathbb{K}$ 代数の反準同型, 対合,
    $\omega(X) = Y^{-1}$, $\omega(T_1) = T_1$, $\omega(Y) = X^{-1}$.
    Fourier 変換の q 差分類似.
  - $\mathbb{H}$ や ω を用いて Macdonald-Koornwinder 多項式に関するノルム予想, 定数項予想や双対性予想などが解決された.

3.1. $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型 DAHA [2/3]

- $\mathbb{K} := \mathbb{C}(\nu, \tau_1, \tau_0, \tau_1^\vee, \tau_0^\vee)$, $\nu := q^{1/2}$,
  $H = \langle T_1, T_0 \mid (T_i - \tau_i)(T_i + 1/\tau_i)\ (i = 0, 1) \rangle_{\mathbb{K}\text{-alg}} \overset{\rho_{q,\tau,\tau^\vee}}{\subset} \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\, \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$.
  $Y := T_0 T_1$, $\mathbb{H} = \left\langle X^{\pm 1}, T_1, Y \right\rangle_{\mathrm{alg}} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\, \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$.
- $\mathbb{H}$ は (抽象) 環として次の表示を持つ [A. Oblomkov, 2004]:
  - 基礎環: $\mathbb{K}' := \mathbb{C}[\nu^{\pm 1}, \tau_1^{\pm 1}, \tau_0^{\pm 1}, (\tau_1^\vee)^{\pm 1}, (\tau_0^\vee)^{\pm 1}]$.
  - 生成元: $T_1, T_0, T_1^\vee, T_0^\vee$.
  - 関係式: $(T_i - \tau_i)(T_i + 1/\tau_i) = 0 \quad (i = 1, 0)$,
    $(T_i^\vee - \tau_i^\vee)(T_i^\vee + 1/\tau_i^\vee) = 0 \quad (i = 1, 0)$, $T_1^\vee T_1 T_0 T_0^\vee = 1/\nu$.

  中心は自明: $Z(\mathbb{H}) = 0$.
- $X_1 := T_0^{-1}(T_1^\vee)^{-1} + T_1^\vee T_0$, $X_2 := T_1^\vee T_1 + \nu T_0 T_0^\vee$, $X_3 := \nu T_0^\vee T_1^\vee + q T_1 T_0$
  で定まる $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{H}$ は以下を満たす [M. Mazzocco, 2016]:
  $[X_1, X_2]_q = \overline{q} X_3 - \overline{\nu}(\overline{\tau_0}\,\overline{\tau_1} - \overline{\tau_0^\vee} M)$, $\quad [A, B]_q := \nu AB - \nu^{-1} BA$,
  $[X_2, X_3]_q = \overline{q} X_1 - \overline{\nu}(\overline{\tau_1}\,\overline{\tau_0^\vee} - \overline{\tau_0} M)$, $\quad M := (\nu\tau_1)^{-1} T_1 - \nu\tau_1 T_1^{-1}$,
  $[X_3, X_1]_q = \overline{q} X_2 - \overline{\nu}(\overline{\tau_0^\vee}\,\overline{\tau_0} - \overline{\tau_1} M)$, $\quad \overline{\alpha} := \alpha - \alpha^{-1}$, $a_1, a_2, a_3, b, c \in \mathbb{K}'$,
  $\nu X_1 X_2 X_3 - q X_1^2 - X_2^2/q - q X_3^2 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + b + cM = 0$.

3.1. $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型 DAHA [3/3]

- $\mathbb{H}$: 生成元 $T_1, T_0, T_1^\vee, T_0^\vee$. $\qquad (\nu = q^{1/2}, \quad \underline{\tau} = (\tau_1, \tau_0, \tau_1^\vee, \tau_0^\vee))$
  関係式 $(T_i - \tau_i)(T_i + 1/\tau_i)$, $(T_i^\vee - \tau_i^\vee)(T_i^\vee + 1/\tau_i^\vee)$, $T_1^\vee T_1 T_0 T_0^\vee - 1/\nu$.
- 別表示: $X_1 := T_0^{-1}(T_1^\vee)^{-1} + T_1^\vee T_0$, $X_2 := \ldots$, $X_3 := \ldots$,
  $[X_1, X_2]_q = \overline{q} X_3 - \overline{\nu}(\overline{\tau_0}\,\overline{\tau_1} - \overline{\tau_0^\vee} M)$, etc.,
  $\nu X_1 X_2 X_3 - q X_1^2 - X_2^2/q - q X_3^2 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + b + cM = 0$.
- $q = 1$ で考える [Oblomkov, 2004]. $\qquad \mathbb{K}'' := \mathbb{C}[\tau_1^{\pm 1}, \tau_0^{\pm 1}, (\tau_1^\vee)^{\pm 1}, (\tau_0^\vee)^{\pm 1}]$.
  - $\mathbb{H}_{q=1}$ の中心 $Z_{q=1}$ はアフィン三次曲面 $\mathcal{C}(\underline{\tau})$ の座標環:
    $Z_{q=1} = \mathbb{K}''[X_1, X_2, X_3]/(R_{\underline{\tau}})$, $\qquad a_1', a_2', a_3', b' \in \mathbb{K}''$,
    $R_{\underline{\tau}} := X_1 X_2 X_3 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 + a_1' X_1 + a_2' X_2 + a_3' X_3 + b'$.
    Fricke-Klein の 4 次元族と一致.
  - $Z_{q=1}$ は Poisson 構造を持つ. $C_{\underline{\tau}}$ の非特異点でシンプレクティック.
    $\{X_2, X_1\} = X_2 X_1 - 2X_3 + a_3'$,
    $\{X_1, X_3\} = X_1 X_3 - 2X_2 + a_2'$,
    $\{X_3, X_2\} = X_3 X_2 - 2X_1 + a_1'$.
  - $\mathcal{C}(\underline{\tau})$ の特異点には ADE 特異点のみ現れうる: $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{D}_4$ 型.

3.2. Askey-Wilson 代数 [1/6]

$(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型 spherical DAHA $\mathbb{SH}$. [Oblomkov, 2004]

- $e := \frac{1+\tau_1 T_1}{1+\tau_1} \in H \subset \mathbb{H}$: 冪等元, $e^2 = 1$.
  - $\mathbb{K} = \mathbb{C}(\nu = q^{1/2}, \tau_1, \tau_0, \tau_1^\vee, \tau_0^\vee)$ 上.
    $\mathbb{H} = \langle T_1, T_0, T_1^\vee, T_0^\vee \mid (T_i - \tau_i)(T_i + 1/\tau_i) = 0, \ldots \rangle_{\mathbb{K}\text{-alg}}$.
  - 群環 $\mathbb{C}W = \mathbb{C}\langle s_1 \rangle_{\mathsf{grp}} \subset \mathbb{C}\widetilde{W} = \mathbb{C}\langle s_1, s_0 \rangle_{\mathsf{grp}}$ の対称化作用素 $\frac{1+s_1}{2}$.
- $\mathbb{SH} := e\mathbb{H}e \subset \mathbb{H}$: 部分環, e を単位元とする.
  - 群環や Hecke 環の spherical subalgebra の類似.
- $\mathbb{H}$ や $\mathbb{SH}$ の普遍性: $q_0 \in \mathbb{C}$ が 1 の冪根でなければ,
  族 $\{\mathbb{H}(q, \underline{\tau})\}_{q \in \mathbb{C}, \underline{\tau} \in \mathbb{C}^4}$ は環 $D_{q_0} := \mathbb{C}_{q_0}[X^{\pm 1}, P^{\pm 1}] \rtimes \mathbb{C}W$ の普遍変形,
  族 $\{\mathbb{SH}(q, \underline{\tau})\}_{q \in \mathbb{C}, \underline{\tau} \in \mathbb{C}^4}$ は $D_{q_0}^W = \mathbb{C}_{q_0}[X^{\pm 1}, P^{\pm 1}]^W$ の普遍変形.
  特に変形空間は 5 次元 (=Askey-Wilson 多項式のパラメータの数).
  - Hochschild コホモロジー $\mathrm{HH}^*(D_{q_0=1})$ が $\mathrm{HH}^{1,>2} = 0$, $\mathrm{HH}^2 = \mathbb{C}^5$.
  - $q_0 = 1$ の時は, $\{(C_{\underline{\tau}}, \{\cdot, \cdot\})\}_{\underline{\tau} \in \mathbb{C}^4}$ が
    Poisson 代数 $(D_{q_0=1}^W, \{X, P\} = XP)$ の普遍 Poisson 変形.

3.2. Askey-Wilson 代数 [2/6]

$\mathbb{SH}$ (と同型な環) は色々な文脈に現れる.

- Zhedanov の Askey-Wilson 代数 [Zhedanov, 1991]
  - "量子群" の行列要素として Askey-Wilson 多項式を実現する.
  - FRST 構成 (R 行列から量子群を構成, A 型) の BC 型版 (R 行列と K 行列から). R 行列に q が, K 行列に 4 パラメータがある.
  - Terwilliger の表示 (2013) により $\mathbb{SH}$ と同型なことが分かる.
- Kauffman スケイン代数 [Przytycki, 1991; Turaev, 1988] の一種.
  - $\Sigma_{0,n}$: n-punctured sphere, $I := [0,1]$, $\mathcal{M} := \sigma_{0,n} \times I$.
  - $\mathrm{Sk}_A(\mathcal{M})$: $\mathcal{M}$ 内の framed かつ unoriented な絡み目が生成する $\mathbb{C}[A^{\pm 1}]$ 加群を以下の関係式で割った $\mathbb{C}[A^{\pm 1}]$ 加群:

     $= -(A^2 + A^{-2})$,  $= A$  $+ A^{-1}$  .
  - 環構造: I 方向に絡み目を積む.
  - $\mathrm{Sk}_{\sqrt{-1}q^{1/2}}(\Sigma_{0,4})/$(以下の関係式) $\cong \mathbb{SH}$. [c.f. 樋上和弘, 2019]

    $$\times z_i = \sqrt{-1}(\tau_i - 1/\tau_i), \quad \times z_i^\vee = \sqrt{-1}(\tau_i^\vee - 1/\tau_i^\vee) \quad (i = 0, 1).$$

    $\{4$ 点$\} = \{z_1, z_0, z_1^\vee, z_0^\vee\}$.

3.2. Askey-Wilson 代数 [3/6]

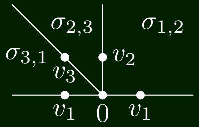
- 量子散乱図 $\mathfrak{D}_{0,4}$. [P. Bousseau, 2023]
  - ミラー対称性における散乱図 (scattering diagram): [Gross-Siebert,...]
    B: 特異点つき整アフィン多様体
    散乱図 $\mathcal{D}$: B の壁 (余次元 1 の整アフィン部分空間+冪級数) の集合.
    $\mathcal{D}$ が整合的 $\rightsquigarrow$ 可換代数 $A_{\mathcal{D}}$, テータ函数基底 $\{\vartheta_p^{\mathrm{cl}}\}_{p\in B(\mathbb{Z})}$,
    構造定数は $\mathcal{D}$ の "破線" (broken lines) から決まる.
  - 団散乱図 $\rightsquigarrow$ 団代数の標準基底. [Gross-Hacking-Keel-Kontsevich, 2018]
  - q 変形版: 量子散乱図 $\mathfrak{D}$. [Kontsevich-Soibelman, Filippini-Stoppa, ...]
    $\mathfrak{D}$ が整合的 $\rightsquigarrow$ 非可換代数 $A_{\mathfrak{D}}$, 量子テータ函数基底 $\{\vartheta_p\}_{p\in B(\mathbb{Z})}$,
    構造定数は $\mathcal{D}$ の量子破線から決まり, q を含む.
  - 量子散乱図 $\rightsquigarrow$ 量子団代数の標準基底. [Davison-Mandel, 2021, ...]
  - $\mathfrak{D}^{\mathrm{cl}}_{0,4}$: 楕円曲線の Weierstrass 族のミラー対称性に関する散乱図.
    [Gross-Hacking-Keel-Siebert, 2019].

3.2. Askey-Wilson 代数 [4/6]

- 量子散乱図 $\mathfrak{D}_{0,4}$. [Bousseau, 2023]
  - $B := \mathbb{R}^2/\langle -\mathrm{id}\rangle \supset B_0 := B \setminus \{0\}$.

    $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}/\sim$, $(x,0) \sim (-x,0)$.

    $B(\mathbb{Z}) := B_0(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$.



  - 係数環 $R = \mathbb{Z}[q^{\pm\frac{1}{2}}, R_{1,0}, R_{0,1}, R_{1,1}, y]$.
  - 量子射線 (quantum ray) (p_ρ, f_ρ):

    $p_\rho \in B_0(\mathbb{Z})$, primitive; $f_\rho \in R[\![z^{-p_\rho}]\!]$, $f = 1 \bmod z^{-p_\rho}$.
  - 量子散乱図: $\mathfrak{D} = \{\rho = (p_\rho, f_\rho) \mid \rho_1 = \rho_2$ if $\mathbb{R}_{\geq 0} p_{\rho_1} = \mathbb{R}_{\geq 0} p_{\rho_2}\}$.
  - $(m,n) \in B_0(\mathbb{Z})$ に対して $\rho_{m,n} = (p_{m,n}, f_{m,n})$ を, $p_{m,n} := (m,n)$ 及び

    $(m,n) = (1,0) \bmod 2$ なら $f_{m,n} := F(R_{1,0}, R_{0,1}R_{1,1}, y, z^{-(m,n)})$,

    $(m,n) = (0,1) \bmod 2$ なら $f_{m,n} := F(R_{0,1}, R_{1,0}R_{1,1}, y, z^{-(m,n)})$,

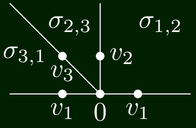
    $(m,n) = (1,1) \bmod 2$ なら $f_{m,n} := F(R_{1,1}, R_{1,0}R_{0,1}, y, z^{-(m,n)})$.

$$\begin{aligned} F^0(r,s,y,x) :=& 1 + \frac{rx(1+x^2)}{(1-q^2x^2)(1-q^{-2}x^2)} + \frac{yx^2}{(1-q^2x^2)(1-q^{-2}x^2)} \\ &+ \frac{sx^3(1+sx+x^2)}{(1-q^2x^2)(1-x^2)^2(1-q^{-2}x^2)} \in \mathbb{Z}[r,s,y][\![x]\!] \end{aligned}$$

  - $\mathfrak{D}_{0,4} := \{\rho_{m,n} \mid (m,n) \in B_0(\mathbb{Z}), \gcd(m,n) = 1\}$.

3.2. Askey-Wilson 代数 [5/6]

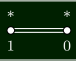
- 量子散乱図 $\mathfrak{D}_{0,4}$ [Bousseau, 2023]
  - $R = \mathbb{Z}[q^{\pm\frac{1}{2}}, R_{1,0}, R_{0,1}, R_{1,1}, y]$.
  - $\mathfrak{D}_{0,4}$ は整合的 $\rightsquigarrow$
    R 代数 $A_{\mathfrak{D}_{0,4}}$, 量子テータ函数基底 $\{\vartheta_p\}_{p \in B(\mathbb{Z})}$.
  - $A_{\mathfrak{D}_{0,4}}$ は $\vartheta_{v_1}, \vartheta_{v_2}, \vartheta_{v_3}$ で生成され, q 交換子関係式及び q 三次関係式を満たす (非可換三次曲面).
    特に $A_{\mathfrak{D}_{0,4}}$ は $\mathbb{SH}$ と同型.



  - Bousseau は更に $A_{\mathfrak{D}_{0,4}} \cong \mathrm{Sk}(\Sigma_{0,4}) \approx \mathcal{X}^q_{\mathrm{PGL}_2,\Sigma_{0,4}}$ (量子団代数) を用いて, 量子双対写像 $\widehat{\mathbb{I}}\colon \mathcal{A}_{\mathrm{SL}_2,\Sigma_{0,4}} \to \mathcal{X}^q_{\mathrm{PGL}_2,\Sigma_{0,4}}$ に関する strong positivity conjecture を肯定的に解決した.
- 同様の話が $\Sigma_{1,1}$ (1 穴付きトーラス) の場合にも成立.
  - $A_{\mathfrak{D}_{1,1}}$ は A_1 型 spherical DAHA $\mathbb{SH}^{\mathrm{A}_1}$ と同型.
  - 後者に対応する q 直交多項式は Rogers 多項式.

補足

- A_1 型 DAHA $\mathbb{H}^{\mathrm{A}_1}$ は $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$ 型 DAHA $\mathbb{H}$ の部分環.
  この埋め込みに対応するのは [山口-Y.] の 4 つの特殊化の内の O_2.
  - 他の特殊化はアフィン Hecke 環の埋め込みに対応するが, DAHA の埋め込みにはならない.
  - spherical subalgebra $\mathbb{SH}^{\mathrm{A}_n}$ の $n \to \infty$ 極限が 量子トロイダル代数 $\mathfrak{gl}_1$.

型	Dynkin 図形	Weyl 群軌道	t パラメータ			
$(C_1^\vee, C_1)$ Askey-Wilson		$O_1 \sqcup O_1^\vee \sqcup O_0 \sqcup O_0^\vee$	τ_1	$\tau_1^\vee$	τ_0	$\tau_0^\vee$
A_1 Rogers		O_1	1	t	1	t
		O_3	t	1	t	1
		O_2	1	t^2	1	1
		O_4	t^2	1	1	1

3.3. 幾何的 Riemann-Hilbert 対応の量子化 [1/2]

- $\kappa \in \mathcal{K}$: 局所指数.
  $t = (t_1, \dots, t_4) \in T = \mathrm{Conf}^4(\mathbb{P}^1)$: 確定特異点の位置 ($\mathrm{P_{VI}}(\kappa)$ の時間変数).
  $\mathcal{M}_t(\kappa)$: $\mathbb{P}^1$ 上の階数 2, 確定特異点 4 つ $t \in T$, 局所指数 $\kappa \in \mathcal{K}$ の安定放物接続のモジュライ空間 ($\mathrm{P_{VI}}(\kappa)$ の "相空間").
- $a \in A$: 局所モノドロミー.
  $\mathcal{R}_t(a)$: モノドロミー表現 $\rho\colon \pi_1(\Sigma_{0,4}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ のモジュライ空間.
  $\mathcal{R}_t(a) \cong \mathcal{C}(\underline{\tau})$: Fricke-Klein の三次曲面 $=$ AW 代数の古典極限 $\mathbb{SH}_{q=1}$.
- $\mathrm{RH}_{t,\kappa}\colon \mathcal{M}_t(\kappa) \to \mathcal{R}_t(a) \cong \mathcal{C}(\underline{\tau})$, $\nabla \mapsto \rho$, $a = \mathrm{rh}(\kappa)$: Riemann-Hilbert 対応.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_t & \xrightarrow{\mathrm{RH}} & \mathcal{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{K} & \xrightarrow[\mathrm{rh}]{} & \Theta \end{array}$$

- <u>定理</u> (VI 型 Painlevé 方程式の幾何学的 Riemann-Hilbert 対応)
  [稲葉・岩崎・齋藤, 2004-06]
  κ が "壁" 上になければ $\mathrm{RH}_{t,\kappa}$ は双正則 (biholomorphic).
  κ が "壁" 上にあるなら $\mathrm{RH}_{t,\kappa}$ は (解析的) 極小特異点解消.

3.3. 幾何的 Riemann-Hilbert 対応の量子化 [2/2]

Askey-Wilson 代数の諸研究は RH 対応の “量子化” の存在を示唆している:

$$
\begin{tikzcd}
& \text{AW 空間?} \arrow[rr, dotted, "\mathrm{QRH?}"] \arrow[dl, dotted] \arrow[dd, dotted] & & \mathbb{SH} \arrow[dl, "q\to 1"] \arrow[dd] \\
\mathcal{M}_t \arrow[rr, "\mathrm{RH}"] \arrow[dd] & & \mathcal{C} \arrow[dd] & \\
& ? \arrow[rr, dotted, "\mathrm{qrh?}"] \arrow[dl, dotted] & & \Theta \times \mathbb{C}_q \arrow[dl, "q\to 1"] \\
\mathcal{K} \arrow[rr, "\mathrm{rh}"'] & & \Theta &
\end{tikzcd}
$$

関連しそうなこと: クラス S 理論の非可換 line operator 代数:

- クラス S 理論 [D. Gaiotto, 2009–].　　Σ: 穴あき Riemann 面.
  6 次元 $\mathcal{N} = (2,0)$ SCFT $\xrightarrow{\Sigma でコンパクト化}$ 4 次元 $\mathcal{N} = 2$ SQFT $\mathcal{T}_\Sigma$.
- 4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 理論 $\mathcal{T}$ $\rightsquigarrow$ line operator 代数 $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ (可換環).
  $\rightsquigarrow$ 非可換変形 $\mathcal{A}^q_\mathcal{T}$ [Gaiotto-Moore-Neitzke, 2010]
- $\mathcal{A}^q_{\mathcal{T}_\Sigma}$ “ $\cong$ ” $\mathrm{Sk}_{\sqrt{-1}q^{1/2}}(\Sigma)$. これを $\Sigma = \Sigma_{0,4}$, $\Sigma_{1,1}$ で示したのが [Bousseau].

目次

ご清聴ありがとうございました.

文献 [1/3]

全般の文献:

- I. G. Macdonald, Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials, Cambridge Tracts in Mathematics, 157, Cambridge Univ. Press, 2003.
- 柳田伸太郎, 書評: Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials, 数学, 74 号 1 巻, 2022, 105–111. (上の本の書評)
- M. Noumi, Macdonald Polynomials — Commuting Family of q-Difference Operators and Their Joint Eigenfunctions, Springer Briefs in Math. Phys., **47**, 2023.

1 節の文献:

- R. Askey, J. Wilson, Some Basic Hypergeometric Orthogonal Polynomials that Generalize Jacobi Polynomials, Memoirs AMS, 1985, pp.55.
- I. Cherednik, Double affine Hecke algebras, LMS Lect. Note Ser., 319, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- J. van Diejen, Self-dual Koornwinder-Macdonald polynomials, Invent. Math., 126 (1996), no. 2, 319–339.
- I. G. Macdonald, Orthogonal polynomials associated with root systems, preprint (1987); arXiv:math/0011046.
- I. G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, 2nd ed., Oxford Univ. Press, 1995.

文献 [2/3]

2 節の文献:

- M. van Meer, Bispectral quantum Knizhnik-Zamolodchikov equations for arbitrary root systems, Sel. Math. New Ser., 17 (2011), 183–221.
- M. van Meer, J. V. Stokman, Double Affine Hecke Algebras and Bispectral Quantum Knizhnik-Zamolodchikov Equations, IMRN, 6 (2010), 969–1040.
- 野海正俊, Macdonald-Koornwinder 多項式と affine Hecke 環, 数理解析研究所講究録, 919 (1995), 44–55.
- S. N. M. Ruijsenaars, Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities, Comm. Math. Phys., 110 (1987), 191–213.
- S. Sahi, Nonsymmetric Koornwinder polynomials and duality, Ann. Math., 150 (1999), 267–282.
- J. V. Stokman, Macdonald-Koornwinder polynomials, in Encyclopedia of Special Functions: The Askey-Bateman Project, vol. 2, Cambridge Univ. Press, 2020; arXiv:1111.6112.
- J. V. Stokman, The c-function expansion of a basic hypergeometric function associated to root systems, Ann. Math., 179 (2014), 253–299.
- K. Yamaguchi, S. Yanagida, Specializing Koornwinder polynomials to Macdonald polynomials of type B, C, D and BC, J. Algebraic Combin., 57 (2022), 171–226.

文献 [3/3]

3 節の文献:

- P. Bousseau, Strong Positivity for the Skein Algebras of the 4-Punctured Sphere and of the 1-punctured Torus, Comm. Math. Phys., 398 (2023), 1–58.
- B. Davison, T. Mandel, Strong positivity for quantum theta bases of quantum cluster algebras. Invent. Math., 226 (3) (2021), 725–843.
- M. Gross, P. Hacking, S. Keel, M. Kontsevich, Canonical bases for cluster algebras, J. AMS., 31 (2) (2018), 497–608.
- M. Gross, P. Hacking, S. Keel, B. Siebert, The mirror of the cubic surface, preprint (2019); arXiv:1910.08427.
- K. Hikami, DAHA and skein algebra of surfaces: double-torus knots, Lett. Math. Phys., 109 (2019), 2305–58.
- A. Oblomkov, Double affine Hecke algebras of rank one and affine cubic surfaces, Int. Math. Res. Not., 2004 (2004) no. 18, 877–912.
- P. Terwilliger, The universal Askey-Wilson algebra and DAHA of type $(\mathrm{C}_1^\vee, \mathrm{C}_1)$, SIGMA, 9, Paper 047, (2013), 40pp.
- A. S. Zhedanov. Hidden symmetry of Askey-Wilson polynomials, Theor. Math. Phys., 89 (1991), 1146–57.
- M. Inaba, K. Iwasaki, M. Saito, Dynamics of the Sixth Painlevé Equation, Séminaires and Cnngrés, 14 (2006), 103–167.