

V : fin. dim. \mathbb{R} -lin. sp. $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$, $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$
 R : root sys. of V . $\langle v, f \rangle = f(v)$

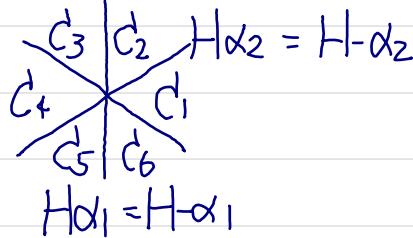
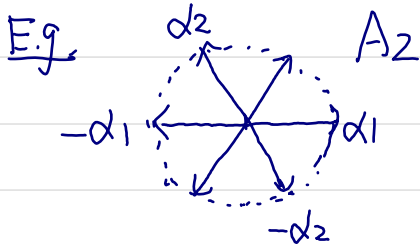
$\alpha \mapsto \exists! \alpha^\vee \in V^* \quad \langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$

$\leadsto \Delta_\alpha \in \text{End}(V)$, $\Delta_\alpha(v) := v - \langle v, \alpha^\vee \rangle \alpha$: reflection
 $(\cdot | \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ $(v | w) := \sum_{\alpha \in R} \langle v, \alpha^\vee \rangle \langle w, \alpha^\vee \rangle$
 : inner product on V

$W = W(R) := \langle \Delta_\alpha \mid \alpha \in R \rangle_{\text{grp}} \subset \text{Aut}(V, (\cdot | \cdot))$: Weyl group
 fin. subgroup

$H_\alpha := \{v \in V \mid \Delta_\alpha(v) = v\}$: reflection hyper-plane
 $\subset V$, $\text{codim}_V H_\alpha = 1$ ($\therefore H_\alpha \oplus \mathbb{R}\alpha = V$)
 lin. subsp

Defn. A connected component of $V \setminus \bigcup_{\alpha \in R} H_\alpha$ is called a chamber.



C_1, \dots, C_6 : chamber

Thm 1. (1) $W \curvearrowright$ {chambers} simply transitive

$(\forall C_1, C_2 \exists! g \in W \quad g(C_1) = C_2)$

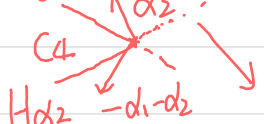
(2) $\forall C$: chamber \bar{C} is a fundamental region of W

$(\forall v \in W \exists! x \in \bar{C} \exists! g \in W \quad v = g \cdot x)$

(3) $\forall C$ is a cone $(\forall x \in C, \forall c \in \mathbb{R}_{>0} \quad cx \in C)$

(4) $\forall C$: chamber. $\{H_1, \dots, H_\ell\}$: walls of C

E.g. C_4 (in A_2)



$B(C_4) = \{\alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2\}$

$\exists! B(C) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\} \subset R$, indivisible,

s.t. $H_i = H_{\alpha_i}$, α_i and C are on the same side of H_i

(5) $\forall \mathcal{C}$: chamber $B(\mathcal{C})$ is a basis of V (so $l = \dim V = \#B(\mathcal{C})$)

(6) $\forall \mathcal{C} = \{v \in V \mid \langle v, \alpha_i \rangle > 0 \ \forall \alpha_i \in B(\mathcal{C})\}$
 $= \{v \in V \mid (v | \alpha_i) > 0 \ \forall \alpha_i \in B(\mathcal{C})\}$

$$\odot \alpha^V = 2(\alpha | \cdot) / (\alpha | \alpha)$$

(7) $\forall \mathcal{C}$, $B(\mathcal{C}) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ $S := \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$

$\Rightarrow (W, S)$ is a Coxeter system.

i.e. $W = \langle S \mid (\alpha \alpha')^{m(\alpha, \alpha')} = 1 \ (\alpha, \alpha' \in S) \rangle$

$$m(\alpha, \alpha') \begin{cases} = 1 & \alpha = \alpha' \\ \geq 2 & \alpha \neq \alpha' \end{cases} \quad \square$$

Def. $\Delta \subset R$ is a set of simple roots if \exists chamber \mathcal{C} s.t. $\Delta = B(\mathcal{C})$
 \square

Thm. classification of irreducible reduced root systems

$A_{n-1}, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$

(X_l : of rank l)

被約かつ既約な (有限) ルート系

柳田 伸太郎*1

- V : \mathbb{R} 上の有限次元線形空間, $V^* := \text{Hom}(V, \mathbb{R})$, $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle v, f \rangle := f(v)$.
- $R \subset V$: ルート系.
 - $\alpha \in R$ に対し $\alpha^\vee \in V^*$, $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ が一意に決まる
 - $s_\alpha \in \text{End}(V)$, $s_\alpha(v) := v - \langle v, \alpha^\vee \rangle \alpha$: 鏡映.
 - $(\cdot | \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(x|y) := \sum_{\alpha \in R} \langle x, \alpha^\vee \rangle \langle y, \alpha^\vee \rangle$: 内積.
- $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset R$: 単純ルート集合. $l = \dim V = \text{rank } R$.

定義. ルート系 $R \subset V$ とその単純ルート集合 $\Delta \subset R$ に対し, V 上の半順序 \geq が次で定まる.

$$\lambda \geq \mu \stackrel{\text{dfn}}{\iff} \lambda - \mu \in \mathbb{N}\Delta := \left\{ \sum_{\alpha \in R} c_\alpha \alpha \in V \mid c_\alpha \in \mathbb{N} \right\}$$

この \geq に関する R の最大元を **最高ルート** (highest root) と呼ぶ.

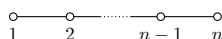
事実 2. 既約なルート系 R には最高ルートが存在する. それを $\tilde{\alpha} \in R$ と書く.

事実 3. 被約かつ既約なルート系は, 同型を除いて, 以下の $A_{n \geq 1}, B_{n \geq 2}, C_{n \geq 3}, D_{n \geq 4}, E_{6,7,8}, F_4, G_2$ 型で尽くされる.

ルート系と単純ルート集合 $V \supset R \supset \Delta$ 及び最高ルート $\tilde{\alpha} \in R$ は以下の通り. 古典型 (A_n, B_n, C_n, D_n 型) については Weyl 群 $W = W(R)$ 及びその V への作用も記す.

A_n 型

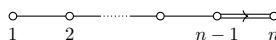
- $V := \{ \sum_{i=1}^{n+1} a_i \varepsilon_i \mid \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
- $R := \{ v \in V \mid (v|v) = 2 \} \cap \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathbb{Z}\varepsilon_i = \{ \varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n \}$.
- $\Delta := \{ \alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \alpha_n := \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} \}$.
- $\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 - \varepsilon_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.
- $W = \mathfrak{S}_{n+1}$. ε_i の添え字の置換で V に作用.
- Dynkin 図形



B_n 型

R には長さの 2 乗が 1 のものが $2n$ 個, 2 のものが $2n(n-1)$ 個, 計 $2n^2$ 個の元がある.

- $V := \mathbb{R}^n$.
- $R := \{ v \in V \mid (v|v) \in \{1, 2\} \} \cap \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i = \{ \pm \varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n \} \cup \{ \pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n \}$.
- $\Delta := \{ \alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \alpha_{n-1} := \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \alpha_n := \varepsilon_n \}$.
- $\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_{n-1} + 2\alpha_n$.
- $W = \mathfrak{S}_n \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. \mathfrak{S}_n は ε_i の添え字の置換で, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ は $\varepsilon_i \mapsto -\varepsilon_i$ で作用.
- Dynkin 図形

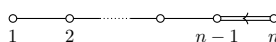


*1 名古屋大学大学院多元数理科学研究科, Date: 2022/04/22, E-mail: yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

C_n 型

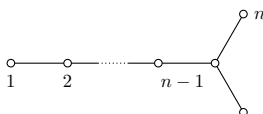
C_n 型ルート系は B_n 型の “双対” である.

- $V := \mathbb{R}^n$.
- $R := \{v \in V \mid (v|v) \in \{2, 4\}\} \cap \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i = \{\pm 2\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$.
- $\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \alpha_{n-1} := \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \alpha_n := 2\varepsilon_n\}$.
- $\tilde{\alpha} = 2\varepsilon_1 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n$.
- $W = \mathfrak{S}_n \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. 作用は B_n の時と同様.
- Dynkin 図形



D_n 型

- $V := \mathbb{R}^n$.
- $R := \{v \in V \mid (v|v) = 2\} \cap \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i = \{\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$.
- $\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \alpha_{n-1} := \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \alpha_n := \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n\}$,
- $\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n$.
- $W = \mathfrak{S}_n \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$.
 \mathfrak{S}_n は ε_i の添え字の置換で, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$ は偶数個の符号変換 $\varepsilon_i \mapsto -\varepsilon_i$ で作用.
- Dynkin 図形



G₂ 型

例外型ルート系の実現は古典型に比べるとあまり “自然” には見えない.

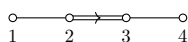
- $V := \{\sum_{i=1}^3 a_i \varepsilon_i \mid \sum_{i=1}^3 a_i = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.
- $R := \{v \in V \mid (v|v) \in \{2, 6\}\} \cap \bigoplus_{i=1}^3 \mathbb{Z}\varepsilon_i$
 $= \{\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq 3\} \cup \{\pm(2\varepsilon_i - \varepsilon_j - \varepsilon_k) \mid \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}\}$.
 $|R| = 6 + 6 = 12$.
- $\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 := -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\}$.
- $\tilde{\alpha} = 2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$.
- $W = \mathfrak{D}_6$ は位数 12 の二面体群.
- Dynkin 図形



F₄ 型

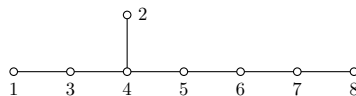
補助的に格子 $L \subset V$ を導入する. $|R| = 48$ で, 長さの 2 乗が 1 のものと 2 のものが 24 個ずつある.

- $V := \mathbb{R}^4 \supset L := \bigoplus_{i=1}^4 \mathbb{Z}\varepsilon_i + \mathbb{Z}(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i)$.
- $R := \{v \in L \mid (v|v) \in \{1, 2\}\}$
 $= \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\} \cup \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq 4\} \cup \{\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)\}$.
- $\Delta := \{\alpha_1 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \alpha_2 := \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \alpha_3 := \varepsilon_4, \alpha_4 := \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)\}$.
- $\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$.
- Dynkin 図形

E₈ 型

再び補助的な格子 $L \subset V$ を導入する. $|R| = 240$ である.

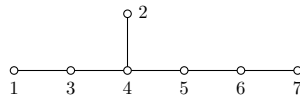
- $V := \mathbb{R}^8 \supset L := \{\sum_{i=1}^8 c_i \varepsilon_i \mid c_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^8 \varepsilon_i \in 2\mathbb{Z}\} + \mathbb{Z}(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^8 \varepsilon_i)$.
- $R := \{v \in L \mid (v|v) = 2\} = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq 8\} \cup \{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^8 \pm \varepsilon_i \mid - \text{が偶数個}\}$.
- $\Delta := \{\alpha_1 := \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8), \alpha_2 := \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \alpha_i := \varepsilon_{i-1} - \varepsilon_{i-2} \ (3 \leq i \leq 8)\}$.
- $\tilde{\alpha} = \varepsilon_7 + \varepsilon_8$.
- Dynkin 図形

E₇ 型

E₈ 型の部分ルート系として実現される. $|R| = 126$ である.

E₈ 型のルート系および単純ルート集合を $\mathbb{R}^8 \supset R(E_8) \supset \Delta(E_8) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_8\}$ と書く.

- $V := \text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_7\}_{\mathbb{R}\text{-lin}} \subset \mathbb{R}^8$.
- $R := R(E_8) \cap V = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq 6\} \cup \{\pm(\varepsilon_7 - \varepsilon_8)\} \cup \{\pm\frac{1}{2}(\varepsilon_7 - \varepsilon_8 + \sum_{i=1}^6 \pm \varepsilon_i) \mid - \text{は奇数個}\}$.
- $\Delta := \{\alpha_1, \dots, \alpha_7\}, \tilde{\alpha} = \varepsilon_8 - \varepsilon_7$.
- Dynkin 図形

E₆ 型

再び E₈ 型のルート系および単純ルート集合を使う. $|R| = 72$ である.

- $V := \mathbb{R}\{\alpha_1, \dots, \alpha_6\} \subset \mathbb{R}^8$.
- $R := R(E_8) \cap V = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq 5\} \cup \{\pm\frac{1}{2}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \sum_{i=1}^5 \pm \varepsilon_i) \mid - \text{は奇数個}\}$,
- $\Delta := \{\alpha_1, \dots, \alpha_6\}, \tilde{\alpha} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8)$.
- Dynkin 図形

