書評: I.G. Macdonald: Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials.
Cambridge Tracts in Math., 157, Cambridge Univ. Press, 2003 年, x+175 ページ.

評者: 柳田 伸太郎 *

1 Macdonald 多項式の理論と本書の概要

1980 年代後半に I.G. Macdonald はルート系に付随した多変数 q 直交多項式系を導入した [Ma87]. それは種々の対称多項式や実ないし p 進簡約 Lie 群上の帯球函数, 更に Heckman-Opdam の Jacobi 多項式や Askey-Wilson 多項式といった直交多項式系を統合したもので, 現在では **Macdonald 多項式**と呼ばれている. 1990 年代に入り I. Cherednik らによって**アフィン Hecke 環**の表現論からのアプローチが開拓され, Macdonald 多項式の理論は **Macdonald-Cherednik 理論**とも呼ばれている. 本書はこの Macdonald 多項式の理論の, 創始者による成書である.

本書のレビューを始める前に, Macdonald 多項式とは何であったか, 対称多項式 (ないし A 型*1) の場合を復習しておこう. q と t を不定元とし, 基礎体を $\mathbb{K}=\mathbb{Q}(q,t)$ とする. 変数 $x=(x_1,\ldots,x_n)$ の $\mathbb{K}$ 値函数 $f(x)$ を考え, 変数 x_i を q 倍する作用素を T_{q,x_i} と書く. つまり $T_{q,x_i}f(x_1,\ldots,x_n)=f(x_1,\ldots,qx_i,\ldots,x_n)$ と作用する. 作用素 T_{q,x_i} 及びその (適当な係数の) 線形結合は q 差分作用素と呼ばれる. 次の有理函数係数の q 作用素族を考えよう:

$$D_x^{(r)} := t^{\binom{r}{2}} \sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n\}\\ |I|=r}} \prod_{i\in I;\, j\notin I} \frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j} \prod_{i\in I} T_{q,x_i} \quad (r=1,\ldots,n).$$

これが r 階の **Macdonald 差分作用素**と現在呼ばれているもので, 基本的性質は次の二つである.

- $D_x^{(r)}$ 達は互いに可換: 交換子を $[\cdot,\cdot]$ で表すと $[D_x^{(r)},D_x^{(s)}]=0$.
- 各 $D_x^{(r)}$ は対称多項式を対称多項式に写す: $D_x^{(r)}(\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n})\subset\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$.

対称多項式の空間 $\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ に可換な作用素族 $\{D_x^{(r)}\mid 1\le r\le n\}$ が作用しているので, その同時対角化ができないか, という問題が考えられる. A 型ルート系の意味で自然な三角性を課すことで同時固有函数が得られる, というのが Macdonald の発見である. 説明のための記号を用意しよう. 長さ n の分割 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{Z}_{\ge0}^n$, $\lambda_1\ge\cdots\ge\lambda_n$ には対称群 $\mathfrak{S}_n$ が添え字の置換で作用する. それによって $m_\lambda(x):=\sum_{\mu\in\mathfrak{S}_n.\lambda}x^\mu$, $x^\mu:=x_1^{\mu_1}\cdots x_n^{\mu_n}$ で対称多項式が定まり, $\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ の $\mathbb{K}$ 基底をなす. $m_\lambda(x)$ は単項対称多項式と呼ばれる. また分割の支配 (又はドミナンス) 順序を $\ge$ で表す. つまり, $|\lambda|_k:=\sum_{i=1}^k\lambda_i$ とすると, 長さ n の分割 λ と μ に対して $\lambda\ge\mu \iff |\lambda|_n=|\mu|_n$ かつ任意の $1\le k\le n$ に対し $|\lambda|_k\ge|\mu|_k$. すると対称多項式の場合の Macdonald の定理 [Ma87, Ma95] は次のようになる: 対称多項式の族 $\{P_\lambda(x;q,t)\mid\lambda:$ 長さ n の分割 $\}\subset\mathbb{K}[X]^{\mathfrak{S}_n}$ であって二条件

* 名古屋大学大学院多元数理科学研究科. e-mail: yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

*1 [三 04] の用語に従って, A 型の GL 描像と呼ぶのが最も正確.

- $P_\lambda(x;q,t)=m_\lambda(x)+\sum_{\mu<\lambda}c_{\lambda,\mu}m_\mu(x)$, $c_{\lambda,\mu}\in\mathbb{K}$
- $P_\lambda(x;q,t)$ は作用素族 $\{D_x^{(r)}\mid 1\le r\le n\}$ の**同時固有函数**

を満たすものが一意に存在する．これらが **Macdonald 対称多項式**である．$P_\lambda(x;q,t)$ 達は $\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ の $\mathbb{K}$ 基底をなし, Macdonald 内積と呼ばれる $\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ の内積[*2] $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関する**直交多項式系**である．

Macdonald 対称多項式 $P_\lambda(x;q,t)$ の性質は, Macdonald 差分作用素 $D_x^{(r)}$ 達や Macdonald 内積を用いて調べることができる．特にパラメータ q,t の特殊化で古典的な対称多項式と対応がつくことが知られている．例えば $q=t$ とすれば $P_\lambda(x;q,q)$ は q には依存せず, Schur 多項式 $s_\lambda(x)$ と一致する．詳しくは, やはり Macdonald による対称函数の本 [Ma95] を参照されたい．

実は A 型だけではなく他のルート系についても, **適切な内積** $\langle\cdot,\cdot\rangle$ と**ウェイトに関する三角性**で **Weyl 群不変な直交多項式族**が導入できる, というのが [Ma87] で創始された **Macdonald 多項式**の理論である．正確には, admissible pair [*3] と呼ばれる有限ルート系の組 (Δ,Δ') に対して直交多項式系が導入されている．但しこの時点では対称多項式の場合ほどには理論が整備されていない．特に q 差分作用素に関する知見が不十分で, 直交多項式族の一意存在性以上のことはあまりよく分からず, 例えば内積値の明示式は予想として残された．

この q 差分作用素達が**アフィン Hecke 環** $\mathfrak{H}$[*4] で統制されていることを見抜き, それを主軸に Macdonald 多項式の理論を組み立て直したのが Cherednik である [C92, C95a, C95b, C95c]．そのアイデアの要点は, Lie 群の対称空間上の球函数を普遍展開環の中心を使って調べる Harish-Chandra 理論の類似である．Harish-Chandra 理論では展開環の中心を微分作用素として実現して用いたが, その q 差分類似として, $\mathfrak{H}$ の中心をウェイト格子 L の群環 A 上の作用素として実現する **Lusztig 実現** [L89] を用いる．$\mathfrak{H}$ は拡大アフィン Weyl 群 W の群環を q 変形したものと思えるが, W の平行移動部分に対応した $\mathfrak{H}$ の元は, Lusztig 実現では q 差分作用素になっている．こうして現れた q 差分作用素を [野 97] に従って **q-Dunkl 作用素**と呼ぶ[*5]．この節の前半で登場した Macdonald 差分作用素は, 実は A 型の場合の q-Dunkl 作用素達から復元できることも分かる [野 97, 第 3 日目] [*6]．Cherednik はウェイト格子の群環 A を表現空間とするアフィン Hecke 環 $\mathfrak{H}$ の基本表現を導入し [C95a], また内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の '非対称版' $(\cdot,\cdot)$ による直交性と L 上の半順序を使って**非対称 Macdonald 多項式** $E_\lambda(x)$ を構成して [C95b], Macdonald 多項式 $P_\lambda(x)$ が有限 Weyl 群 $W_0\subset W$ による $E_\lambda(x)$ の対称化とみなせることを解明した．平行して $P_\lambda(x)$ の x に関する特殊値についての明示式 (evaluation formula) を証明し [C95c], また先述の内積値予想を解決した [C95a].

アフィン Hecke 環の表現論を用いた Macdonald 多項式の理論は, 冒頭に述べたように Macdonald-Cherednik 理論と呼ばれる．本書はその自己完結的な解説書である．

2　本書の特色

一般のルート系に対する Macdonald 多項式の理論を細部にまで立ち入って解説している文献はあまり多くなく, 完全な証明も書かれている点でも本書は重要な文献である．類似の書籍としては, 理論のもう一人の立役

*2 本書では幾つかの内積が導入されているが, この $\mathbb{K}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ 上の内積に該当するものは $<\cdot,\cdot>$ と書かれている．

*3 定義は以下の通り: admissible pair (Δ,Δ') とは, 有限次元実 Euclid 空間 V を張るルート系 Δ と Δ' の組であって, Δ' は被約であり, かつ両者が同じ Weyl 群を持つもののことである．なお [Ma87] での記号は (R,S) だが, 本稿では混乱を避けるため置き換えた．

*4 ここで用いられる Hecke 環は拡大アフィン Weyl 群の群環の変形なので, [三 04] のように拡大アフィン Hecke 環と呼ぶのが正確なのだが, 本書では the affine Hecke algebra と統一的に呼ばれているので, それに合わせて本稿でもアフィン Hecke 環と呼ぶ．

*5 評者の見落としが無ければ, 本書にこの用語は登場しない．

*6 このことについては, 本書では 5 章の章末コメントで触れられているが, 詳細は書かれていない．

者である Cherednik による書籍 [C05] があり, 背景にある量子可積分系との関わりや階数 1 の場合の多角的な解説が含まれている分, 434 ページと本書よりずっと大部の本になっている．また A 型の Macdonald 多項式については対称函数の理論に基づいた構成が [Ma95] で解説されていて, これも 475 ページの大部の本である．これらの書籍と比較すると, 本書は論理的な最小化を図っていることもあってずっとコンパクトであり, 論理や構成の詳細を一通り知りたいという人向けの書籍である．一方で背景や周辺知識については完全にそぎ落とされていて, そのことについては本書の序文の最後にもコメントがある．本書で扱っていない背景知識とともに一般のルート系に対する Macdonald 多項式の概観が把握できる文献として, Macdonald による講義録を基にした本 [Ma98] 及び A. A. Kirillov Jr. による講義録 [Ki97] がある．より近年のものを一つ挙げると, J. V. Stokman による概説記事 [St11] がある．

もう一つ本書の特色として触れておきたいのは, その理論設定の妙である．前節で言及したように本書は Cherednik が 1990 年代に創始したアフィン Hecke 環の表現論に基づくアプローチをとっているが, 同時期に導入された Koornwinder 多項式もその理論の範疇に収めている．ここで **Koornwinder 多項式**とは, 一変数 q 超幾何直交多項式の Askey-Wilson 多項式

$$p_l\left(\tfrac{x+x^{-1}}{2}; a, b, c, d \,\middle|\, q\right) := \frac{(ab, ac, ad; q)_l}{a^l}\, {}_4\phi_3\left[\begin{matrix} q^{-l},\ q^{l-1}abcd,\ ax,\ a/x \\ ab,\ ac,\ ad \end{matrix}; q,\ q\right]$$

の多変数版として T.H. Koornwinder が [Ko92] で導入した多変数 q 直交多項式のことである．変数の数 n が 2 以上だと Koornwinder 多項式は 6 つのパラメータを持つ．[野 95] に従ってそれらを $(q, t, t_0, t_n, u_0, u_n)$ と書く．$n = 1$ だと t はなくなってパラメータは 5 つになり, $(q, t_0, t_1, u_0, u_1) = (q, -ab/q, -cd, -a/b, -c/d)$ で Askey-Wilson 多項式のものと対応する．[Ko92] はパラメータの特殊化で, [Ma87] の admissible pair の意味[*7]での B 型, C 型, (BC, B) 型及び (BC, C) 型の Macdonald 多項式が Koornwinder 多項式から復元されることを示した．

[Ko92] の時点ではアフィン Hecke 環との関わりは不明であったが, 野海 [野 95], van Diejen [vD96], Sahi [Sa99], Stokman [St00] らの仕事により, $(C_n^\vee, C_n)$ 型アフィンルート系とそのアフィン Hecke 環を用いることで Koornwinder 多項式を $(C_n^\vee, C_n)$ 型の Macdonald 多項式とみなせることが解明された．対応する Dynkin 図形とルート集合 S 及び単純ルート α_i $(i = 0, 1, \dots, n)$ を本書の (1.3.18) から引用しよう:

$$\begin{aligned}
&\circ \Leftarrow \circ - \circ - \cdots - \circ - \circ \Rightarrow \circ\,, \qquad S := O_1 \sqcup \cdots \sqcup O_5,\\
&O_1 := \{\pm\epsilon_k + r \mid 1 \le k \le n,\, r \in \mathbb{Z}\}, \quad O_2 := 2O_1, \quad O_3 := O_1 + \tfrac{1}{2}, \quad O_4 := 2O_3 = O_2 + 1,\\
&O_5 := \{\pm\epsilon_k \pm \epsilon_l + r \mid 1 \le k < l \le n,\, r \in \mathbb{Z}\},\\
&\alpha_0 = -\epsilon_1 + \tfrac{1}{2}, \quad \alpha_j = \epsilon_j - \epsilon_{j+1} \quad (1 \le j \le n-1), \quad \alpha_n = \epsilon_n.
\end{aligned}$$

S には C_n 型の拡大アフィン Weyl 群 $W = W_0(C_n) \ltimes t(P(C_n))$ が置換で作用し, その軌道が上記の $O_1, \dots, O_5$ である．実は, Koornwinder 多項式のパラメータのうち (t, t_0, t_n, u_0, u_n) の数 5 は, この W 軌道の数 5 と対応している[*8]．より詳しい Koornwinder 多項式についての説明は, 例えば Stokman の記事 [St04] を参考にされたい．

現在 Macdonald-Cherednik 理論といったら, この Koornwinder 多項式に関する理論も含めることが普通である．本書は絶妙なルート系の設定をすることで, 様々なルート系に付随した Macdonald 多項式と

[*7] admissible pair (Δ, Δ') は, Δ が X 型の, Δ' が Y 型の有限ルート系であるとき, (X, Y) 型と呼ばれる．更に $X = Y$ であるときは X 型と呼ばれる．

[*8] [野 95] のパラメータと W 軌道の対応は, 評者の理解が正しければ, $t_n u_n \leftrightarrow O_1$, $t_n/u_n \leftrightarrow O_2$, $t_0 u_0 \leftrightarrow O_3$, $t_0/u_0 \leftrightarrow O_4$, $t \leftrightarrow O_5$ である．本書では §1.5 でラベルという函数を導入して, W 軌道とパラメータを対応させている．

Koornwinder 多項式とを並列に扱う理論を展開している.

3 本書の構成

本文は 6 章構成で, Macdonald 多項式の構成が行われる第 5 章 (85–147 ページ) が主な内容であり, 第 1–4 章はその準備, 第 6 章は階数 1 の場合の説明である. 各章の内容を順に説明しよう.

1 Affine root systems タイトルの通り, 本書で用いられるアフィンルート系の記号を整備する章であるが, 理論設定は全てこの章に依存しており, また本書を読む際には何度も見返すことになる部分でもある. 要点は §1.3 の既約なアフィンルート系の分類及び, §1.4 で導入される**既約なアフィンルート系の組** (S, S') と**ウェイト格子の組** (L, L') である. §1.3 のアフィンルート系の記号は [Ma71] に遡る Macdonald 独特の記号で, 例えば Kac-Moody Lie 環の文脈でよく用いられるものとは異なることに注意したい. また §1.4 で組 (S, S') を導入するのは, Macdonald 多項式の持つ双対性をルート系レベルで組み込んでおくためである. この組 (S, S') は既に言及した [Ma87] の admissible pair (Δ, Δ') とは違うので, 特に文献比較の際に注意したい.

2 The extended affine Weyl group 既約なアフィンルート系に付随する拡大アフィン Weyl 群 W に関する諸概念が §§2.1–2.3 で導入され, また有限 Weyl 群 W_0 と平行移動の群 $t(L')$ への分解 $W = W_0 \ltimes t(L')$ に関する準備的な議論が §2.4 で行われる. そして §2.7 でウェイト格子 L, L' 上の半順序が導入される. これらは次章以降で繰り返し用いられる.

3 The braid group アフィン Hecke 環は組紐群 $\mathfrak{B}$ の群環を二次関係式で割って定義される. そこで組紐群のレベルで議論できることを済ませておくのがこの章の目的である. 主眼は §3.5 の双対性と呼ばれている主張の証明である. これは Cherednik が [C92] で述べている二重組紐群 $\widetilde{\mathfrak{B}}$ に関するもので, 次章でアフィン Hecke 環の Cherednik 反対合 (anti-involution) を導入する際に用いられる.

4 The affine Hecke algebra Macdonald-Cherednik 理論の肝であるアフィン Hecke 環とその基本表現を導入するのがこの章の目的である. §4.1 の冒頭でアフィン Hecke 環 $\mathfrak{H}$ が定義され, §4.2 で拡大アフィン Weyl 群の分解 $W = W_0 \ltimes t(L')$ に対応した $\mathfrak{H}$ の関係式である Lusztig 関係式が議論される. それを基に §4.3 以降で $\mathfrak{H}$ の基本表現が導入され, 議論される. 基本表現はウェイト格子 L の群環 $A = KL$ を表現空間とする忠実表現であり, また係数体 K には差分パラメータ q 及び S での W 軌道に対応したパラメータが含まれている. 平行移動部分 $t(L')$ に対応した $\mathfrak{H}$ の元 $Y^{\lambda'}$ は q-Dunkl 作用素で実現される. 最後の §4.7 で**二重アフィン Hecke 環** $\widetilde{\mathfrak{H}}$ と **Cherednik 反対合** ω が導入される. この章の内容の大筋は Cherednik [C95a, C95c] によるものだが, Koornwinder 多項式の場合の議論 [野 95, vD96, Sa99, St00] を反映させて, より一般の場合を扱っている点は本書独自の内容といえる.

5 Orthogonal polynomials いよいよ Macdonald 多項式 $P_\lambda(x)$ の導入である. タイトル通り直交多項式として導入することを念頭に, §5.1 では基本表現の表現空間 A 上の内積が導入される. 正確には, [Ma87] で用いられた対称内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と, Cherednik が [C95a] で導入した非対称内積 $(\cdot, \cdot)$ の二つが導入される. 続く §5.2 では Cherednik が [C95b] で導入した非対称 Macdonald 多項式 $E_\lambda(x)$ が議論される. これは $\lambda \in L$ に対して定まる A の元で, 非対称内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する直交性とウェイト格子 L の半順序に関する三角性で一意に決まる. そして §5.3 で Macdonald 多項式 $P_\lambda(x)$ が導入される. §5.2 の議論で A の代わりに有限 Weyl 群 W_0 の作用で不変な部分 $A_0 := A^{W_0}$ を取り, 非対称内積 $(\cdot, \cdot)$ の代わりに対称内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を用いると, 支配的な $\lambda \in L$ に対して $P_\lambda(x) \in A_0$ が定まる. この章の残りの部分では Macdonald

多項式の様々な性質が議論されるが, ここでは §5.8 だけ触れておく. そこでは Cherednik による内積値予想の解決 [C95a] が自己完結的に解説され, 更に Koornwinder 多項式の内積値に関する Gustafson の公式 [G90] も導出されている.

6 The rank 1 case アフィンルート系 S が階数 1 の場合, つまり A_1 型と $(C_1^\vee, C_1)$ 型の場合に 5 章で議論したものたちが書き下されている. 特に A_1 型 Macdonald 多項式は ([三 04] の呼び方に従うと) Rodgers の q 超球多項式ないし連続 q 超球多項式と, $(C_1^\vee, C_1)$ 型 Macdonald 多項式は Askey-Wilson 多項式と本質的に一致する.

4　本書を読むには

最後にこれから本書を読もうとする方, 特に Macdonald 多項式の話をよく知らない学生の方向けのコメントをしたい.

本稿でも繰り返し述べてきたが, 本書は Macdonald 多項式の理論をコンパクトに展開するのが目的で, 関連事項や背景等は殆ど触れていない. また, 対象となる様々なルート系を統一的に扱っている為, 理論設定や記号が独特で, 他の文献と比較するのに苦労する. この意味で, 本書は決して入門書ではなく, むしろ関連分野の専門家や研究を既に始めている人向けの書籍だと評者は感じる.

それでも本書を読みたいというのであれば, まずは Macdonald 多項式の話の概観をつかむのが良いと思う. 幸い日本にはこの分野で活躍している数学者が数多くいて, 日本語で読める解説もたくさんある. ここでは, それらのうちのごく一部だが, [三 04, 野 97, 野 16, 白 03] だけを挙げておく. そのあとで英語の文献 [Ma98, St11] 等を眺めながら本書を読むと上手くいくかもしれない.

Macdonald 多項式の理論の成立の背景には多様な数学があったのだが, それからすると本書の 175 ページというページ数は驚くほど少ない. また本書の序文に書かれているように, 読む上で論理的に必要になる知識は有限ルート系とその Weyl 群に関する基本的なものだけで済む. 一方で本書を読み解くには, 表現論・特殊函数・可積分系といった分野横断的な素養が求められると評者は感じる. 本書のそでには「大学院生にも理解可能」と書かれているが, 実際に院生のセミナーで本書を扱うとするのなら, そうした分野で経験豊富な先達の支援が必要になるだろう.

5　結びの言葉

Macdonald 多項式に関する基本的なことは本書に全て書かれている. 通読するのは難しいかもしれないが, 座右にあると色々と重宝するし, 一部分を解読するだけでも Macdonald 多項式の世界の豊かさが伝わってくる. こうした意味で, 本書は名著と言えよう.

謝辞

神戸大/スウェーデン王立工科大の野海正俊先生と名古屋大の山口航平さんには本稿の原稿に目を通して頂き, お二人から貴重なコメント・ご指摘を頂きました. この場をお借りして感謝申し上げます.

参考文献

[C92] I. Cherednik, *Double affine Hecke algebras, Knizhnik-Zamolodchikov equations, and Macdonald's operators*, Int. Math. Res. Not., **9** (1992), 171–179.

[C95a] I. Cherednik, *Double affine Hecke algebras and Macdonald's conjectures*, Ann. Math., **141** (1995), 191–216.

[C95b] I. Cherednik, *Non-symmetric Macdonald polynomials*, Int. Math. Res. Not., **10** (1995), 483–515.

[C95c] I. Cherednik, *Macdonald's evaluation conjectures and difference Fourier transform*, Inv. Math., **122** (1995), 119–145

[C05] I. Cherednik, *Double affine Hecke algebras*, London Math. Soc. Lecture Note Series, **319**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.

[G90] R. A. Gustafson, *A generalization of Selberg's beta integral.* Bull. Amer. Math. Soc., **22** (1990), no. 1, 97–105.

[Ki97] A. A. Kirillov Jr., *Lectures on affine Hecke algebras and Macdonald's conjectures*, Bull. Amer. Math. Soc., **34** (1997), no. 3, 251–292.

[Ko92] T. H. Koornwinder, *Askey-Wilson polynomials for root systems of type BC*, Contemp. Math., **138** (1992), 189–204.

[L89] G. Lusztig, *Affine Hecke algebras and their graded version*, J, Amer. Math. Soc., **2** (1989), 599–635.

[Ma71] I. G. Macdonald, *Affine root systems and Dedekind's η-function*, Inv. Math., **15** (1972), 161–174.

[Ma87] I. G. Macdonald, *Orthogonal polynomials associated with root systems*, preprint, 1987; typed and published in the Sḿinaire Lotharingien de Combinatoire, **45** (2000), B45a; available from arXiv:math/0011046.

[Ma95] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd ed., Oxford Univ. Press, 1995.

[Ma98] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and orthogonal polynomials*, University Lecture Series vol. **12**, Amer. Math. Soc., 1998.

[Sa99] S. Sahi, *Nonsymmetric Koornwinder polynomials and duality*, Ann. Math., **150** (1999), 267–282.

[St00] J. V. Stokman, *Koornwinder Polynomials and Affine Hecke Algebras*, Int. Math. Res. Not., **19** (2000), 1005–1042.

[St04] J. V. Stokman, *Lecture Notes on Koornwinder polynomials*, in *Laredo Lectures on Orthogonal Polynomials and Special Functions*, 145–207, Adv. Theory Spec. Funct. Orthogonal Polynomials, Nova Sci. Publ., Hauppauge, NY, 2004.

[St11] J. V. Stokman, *Macdonald-Koornwinder polynomials*, in *Encyclopedia of Special Functions: The Askey-Bateman Project: Volume 2, Multivariable Special Functions*, Cambridge University Press, 2020; provisional version available from arXiv:1111.6112.

[vD96] J. van Diejen, *Self-dual Koornwinder-Macdonald polynomials*, Invent. Math., **126** (1996), no. 2, 319–339.

[三 04] 三町勝久, **ダイソンからマクドナルドまで —マクドナルド多項式入門—**, **代数学百科 I 群論の進化** 第 4 章, 335–437, 朝倉書店, 2004.

[野 95] 野海正俊, **Macdonald-Koornwinder 多項式と affine Hecke 環**, 数理解析研究所講究録, **919** (1995), 44–55.

[野 97] 野海正俊述, 長谷川浩司記, **1997 年度東北大学集中講義講義録: アフィン Hecke 環と多変数直交多項式**; 評者のウェブページ https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/others-j.html から入手可.

[野 16] 野海正俊述, 渋川元樹・宮永愛子記, **Macdonald 多項式とその周辺**, 超幾何学校 2014/15 講義録, Rokko Lect. Math., **24**, 39–73, Kobe University, 2016; ウェブページ http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/home-j/rokko.html から入手可.

[白 03] 白石潤一, **量子可積分系入門**, 臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリー **28**, サイエンス社, 2003.