幾何学的導来 Hall 代数

柳田伸太郎 *

概要

Toën は [T06] において Ringel-Hall 代数の一般化である**導来 Hall 代数**を導入した．Ringel-Hall 代数が Abel 圏に対して定義されるのに対し，導来 Hall 代数は dg 圏に対して定義される．一方で Ringel-Hall 代数には Lusztig による**幾何学的定式化** [Lus92] が存在する．箙の表現圏に対する Ringel-Hall 代数の場合，この定式化は表現のモジュライ空間上の構成可能層の導来圏が用いられる．この論説では筆者のプレプリント [Y] に基づいて**導来 Hall 代数の幾何学的定式化**を解説する．この論説の前半では複体のモジュライ空間を実現する**導来スタック**の理論と，それに必要な無限圏や導来代数幾何に関する説明を行う．後半では [Y] で構成した導来スタック上の構成可能層の導来圏と導来函手の理論を紹介し，最後に導来 Hall 代数幾何学的定式化の概要を説明する．

1 Ringel-Hall 代数と導来 Hall 代数

1.1 Ringel-Hall 代数

Ringel-Hall 代数の定義 [R90] の復習から話を始めよう．詳しくは，例えば O. Schiffmann の概説記事 [S06, Chap. 1] を参照せよ．

A を本質的に小な Abel 圏であって，有限体 $\mathbb{F}_q$ 上線形かつ大域次元が有限だとする．$\mathrm{Iso}(\mathsf{A})$ を A の対象の同型類のなす集合とし，対象 M の同型類を $[M] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})$ と書く．また有限台を持つ有理数値関数 $\mathrm{Iso}(\mathsf{A}) \to \mathbb{Q}$ のなす線形空間を $\mathbb{Q}_c(\mathsf{A})$ と書く．$[M] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})$ の特性関数 $1_{[M]}$ は $\mathbb{Q}_c(\mathsf{A})$ の基底をなす．

事実 1.1.1 ([R90])**.** 以下の演算 $*$ によって単位元つき結合 $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathrm{Hall}(\mathsf{A}) := \big(\mathbb{Q}_c(\mathsf{A}), *, 1_{[0]}\big)$ が定まる．これを Abel 圏 A の **Ringel-Hall 代数**と呼ぶ．

$$1_{[M]} * 1_{[N]} := \sum_{[R] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} g^R_{M,N} 1_{[R]}, \quad g^R_{M,N} := a_M^{-1} a_N^{-1} e^R_{M,N},$$
$$a_M := |\mathrm{Aut}(M)|, \quad e^R_{M,N} := |\{0 \to N \to R \to M \to 0 \mid \mathsf{A} \text{ の短完全列 }\}|.$$

A が Dynkin 箙 Q の有限次元表現圏の場合，Q から定まる量子群 $U_t(\mathfrak{g}_Q)$ の $t = \sqrt{q}$ での特殊化の上三角部分と $\mathrm{Hall}(\mathsf{A})$ が関係する．これが Ringel [R90] の主結果であった．正確な主張を述べるには Grothendieck 群 $K_0(\mathsf{A})$ による拡大を導入する必要があるが，ここでは述べない．

構造定数 $g^R_{M,N}$ は上の定義のように拡大の数え上げから定まるが，次のように部分対象の数え上げともみなせる:

$$g^R_{M,N} = \big|\mathcal{G}^R_{M,N}\big|, \quad \mathcal{G}^R_{M,N} := \{N' \subset R \mid N' \simeq N,\ R/N' \simeq M\}.$$

§1.3 で説明する導来 Hall 代数では Abel 圏ではなく dg 圏を考える．dg 圏には拡大という概念は存在しない

* 名古屋大学多元数理科学研究科，yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

ので, その数え上げはできない. しかし部分対象のホモトピー論的類似である**コファイブレーション**はある. そこでコファイブレーションの数え上げで Hall 代数を定義する, というのが Toën のアイデアである.

1.2 dg 圏に関する用語や記号

導来 Hall 代数の説明を次の §1.3 で行うが, そこでは dg 圏, モデル圏及び単体的ホモトピー論に関する用語や記号を用いる. その紹介をこの副節で行う. 詳しくはそれぞれ [高橋 12], [H98], [GJ99] を参照せよ.

可換環 k 上の **dg 圏** (differential graded category) D とは, 圏であって射の集合 $\mathsf{D}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(X,Y)$ が k 加群の複体の構造をもち, また射の合成が複体の射 $\mathsf{D}(Y,Z) \otimes_k \mathsf{D}(X,Y) \to \mathsf{D}(X,Z)$ になるもののことであった. k 加群の複体のなす圏を $\mathsf{C}(k)$ と書き, 圏の **enrichment** の用語を用いると, dg 圏とは $\mathsf{C}(k)$-enrich された圏である, とも言い換えられる. dg 圏 D の反対圏 D^{op} も自然に dg 圏であることに注意する.

D を可換環 k 上の dg 圏とする. D **上の dg 加群**とは $\mathsf{C}(k)$-enriched functor $\mathsf{D}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{C}(k)$ のことである. D 上の dg 加群のなす dg 圏を $\mathsf{Mod}(\mathsf{D})$ と書く.

次にモデル圏に関する記号を用意しておく.

圏 C に弱同値 (weak equivalence), コファイブレーション (cofibration), ファイブレーション (fibration) の三つの射のクラスであって然るべき性質を満たすものが指定されているとき, それを**モデル圏**と呼んだ. この三つのクラスはそのうち二つを定めれば残り一つは一意に定まる. そこで以下はモデル構造 (モデル圏の構造) を定めるのに射の二つのクラスだけ説明する. またコファイブレーションを記号 $\rightarrowtail$ で表す.

モデル圏 C に対して弱同値のクラスで局所化して得られる圏を C の**ホモトピー圏**と呼び $\mathrm{Ho}\,\mathsf{C}$ と書く.

以下 k 加群の複体の圏 $\mathsf{C}(k)$ には次で定まるモデル構造を入れてモデル圏とみなす.

- ファイブレーションは複体の全射とする.
- 弱同値は複体の擬同型とする.

すると dg 圏 D について, dg 加群の dg 圏 $\mathsf{Mod}(\mathsf{D})$ には $\mathsf{C}(k)$ のモデル構造から自然にモデル構造が定まる. 今後はこのモデル構造でもって $\mathsf{Mod}(\mathsf{D})$ をモデル圏とみなす. 上記の $\mathsf{Mod}(\mathsf{D})$ のモデル構造を**射影的モデル構造**と呼ぶ.

次に単体的ホモトピー論から幾つか用語を引用しておく.

0 以上の整数 $n \in \mathbb{N}$ に対し, n 元からなる線形順序集合を $[n] := \{0 \le 1 \le \cdots \le n\}$ と書く. これらを対象とし広義単調増加写像を射とする圏を $\mathbf{\Delta}$ と書く. 圏 C の単体的対象 (simplicial object) とは函手 $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{C}$ のことである. 特に C が集合の圏 Set の場合, 函手 $S : \mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ を**単体的集合** (simplicial set) と呼ぶ. 単体的集合には**ホモトピー群**が定まることも思い出しておこう. また単体的集合の圏を函手圏

$$\mathsf{sSet} := \mathsf{Fun}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$$

として定義する. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $[k] \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Delta}}([k],[n])$ で定まる単体的集合を $\Delta^n \in \mathsf{sSet}$ と書き, n **単体** (n-simplex) とよぶ. また圏 sSet の射を**単体的写像** (simplicial map) と呼ぶ.

単体的集合の圏 sSet には次のようにしてモデル構造が定まる. それを Kan モデル構造と呼ぶ.

- ファイブレーションは Kan ファイブレーション [GJ99, Chap. 1] とする.
- 弱同値は幾何学的実現のホモトピー同値とする.

Kan モデル構造に関する sSet のホモトピー圏

$$\mathcal{H} := \mathrm{Ho}\,\mathsf{sSet} \tag{1.2.1}$$

を**空間のホモトピー圏**と呼ぶ．その対象, つまり単体的集合のホモトピー型を**空間**と呼ぶ．

コンパクト生成 Hausdorff 位相空間の圏 $\mathcal{CG}$ と単体的集合の圏 sSet の間には幾何学的実現 (geometric realization) 函手 $|\ | : \mathsf{sSet} \to \mathcal{CG}$ と特異複体を作る函手 $\mathrm{Sing} : \mathcal{CG} \to \mathsf{sSet}$ が定まる．さらに $\mathcal{CG}$ にはあるモデル構造が存在し, 二つの函手 $|\ |$ と Sing はモデル函手であり, さらにこれらモデル函手の対

$$|\ | : \mathsf{sSet} \rightleftarrows \mathcal{CG} : \mathrm{Sing}$$

は Quillen 随伴 (Quillen adjunction) である．特に圏同値 $\mathcal{H} = \mathrm{Ho}\,\mathsf{sSet} \simeq \mathrm{Ho}\,\mathcal{CG}$ が存在する．

1.3 導来 Hall 代数

前副節 §1.2 の用語を用いて Toën の導来 Hall 代数 [T06] を説明する．

D を可換環 k 上の dg 圏とする．dg 加群の dg 圏 $\mathsf{Mod}(\mathsf{D})$ は $\mathsf{C}(k)$-enrich されているので, **ナーブ構成** (nerve construction) $\mathrm{N}(\ ) : \mathsf{C}(k) \to \mathsf{sSet}$ を用いて, $X, Y \in \mathsf{Mod}(\mathsf{D})$ に対し単体的集合 $\mathrm{Map}_{\mathsf{Mod}(\mathsf{D})}(X, Y)$ を次で定義することができる．

$$\mathrm{Map}_{\mathsf{Mod}(\mathsf{D})}(X, Y) := \mathrm{N}(\mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}(\mathsf{D})}(X, Y)) \in \mathsf{sSet}.$$

dg 加群 $X \in \mathsf{Mod}(\mathsf{D})$ は以下の条件を満たすとき**完全** (perfect) であるという: $\mathsf{Mod}(\mathsf{D})$ の任意の filtered system $\{Y_i\}_{i \in I}$ に対し, 次の自然な射は同型である．

$$\varinjlim_{i \in I} \mathrm{Map}_{\mathsf{Mod}(\mathsf{D})}(X, Y_i) \longrightarrow \mathrm{Map}_{\mathsf{Mod}(\mathsf{D})}(X, \varinjlim_{i \in I} Y_i).$$

コファイブラントかつ完全な対象と弱同値からなる $\mathsf{Mod}(\mathsf{D})$ の部分 dg 圏を次の記号で表す．

$$\mathsf{P}(\mathsf{D}) \subset \mathsf{Mod}(\mathsf{D}).$$

次に dg 加群のコファイブレーション $X \rightarrowtail Y$ のなす圏 $\mathsf{G}(\mathsf{D})$ を導入する．まず dg 加群の射のなす圏を定義したいが, それは 1 単体 $\Delta^1 = \{0 \le 1\}$ を用いて函手圏 $\mathsf{Fun}(\Delta^1, \mathsf{Mod}(\mathsf{D}))$ として定めればよい．この圏には $\mathsf{Mod}(\mathsf{D})$ の射影的モデル構造から自然にモデル構造が定まる．そこで

$$\mathsf{G}(\mathsf{D}) \subset \mathsf{Fun}(\Delta^1, \mathsf{Mod}(\mathsf{D}))$$

を上述のモデル構造についてコファイブラントかつ完全な対象のなす部分 dg 圏とする．その対象 $u : X \rightarrowtail Y$ はコファイブラント完全 dg 加群 X, Y の間のコファイブレーションに他ならない．

モデル圏の図式 $x \to z \leftarrow y$ に対し $x \coprod^z y$ でホモトピー押し出し (homotopy pushout) を表す．すると, $\mathsf{G}(\mathsf{D})$ の対象 $u : X \rightarrowtail Y$ に対し

$$s(u) := X, \quad c(u) := Y, \quad t(u) := Y \coprod^X 0$$

と定めることで, 以下のような dg 圏の図式が得られる．

$$\begin{tikzcd} \mathsf{G}(\mathsf{D}) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "s \times t"'] & \mathsf{P}(\mathsf{D}) \\ \mathsf{P}(\mathsf{D}) \times \mathsf{P}(\mathsf{D}) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X \rightarrowtail Y) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & Y \\ (X, \text{“}Y/X\text{”}) & \end{tikzcd} \tag{1.3.1}$$

但し “Y/X” は $t(u)$ のことである．このように表したのは，Abel 圏 A の場合に対応する図式が単射 $X \hookrightarrow Y$ とその余核 Y/X を用いて表せることと比較させるためである．

dg 圏から単体的集合を作る **dg ナーブ構成** [Lur2, §1.3] を $\mathrm{N_{dg}}$ と書く．また単体的集合のホモトピー型を取る函手を $[\ ] : \mathsf{sSet} \to \mathcal{H}$ と書く．空間 $X^{(0)}(\mathsf{D}), X^{(1)}(\mathsf{D}) \in \mathcal{H}$ を以下のように定義する．

$$X^{(0)}(\mathsf{D}) := [\mathrm{N_{dg}}(\mathsf{P}(\mathsf{D}))], \quad X^{(1)}(\mathsf{D}) := [\mathrm{N_{dg}}(\mathsf{G}(\mathsf{D}))].$$

すると (1.3.1) から以下のような空間の図式が得られる．

$$\begin{tikzcd} X^{(1)}(\mathsf{D}) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "s \times t"'] & X^{0}(\mathsf{D}) \\ X^{(0)}(\mathsf{D}) \times X^{(0)}(\mathsf{D}) & \end{tikzcd}$$

$k = \mathbb{F}_q$ かつ dg 圏 D が**局所有限**，つまり任意の $x, y \in \mathsf{D}$ に対し複体 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(x, y)$ のホモロジーが有界かつ有限次元の場合，上の図式は次のような性質を持つ．

事実 1.3.1 ([T06, Lemma 3.2])**.** 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の局所有限 dg 圏 D について，$X^{(0)}(\mathsf{D}), X^{(1)}(\mathsf{D}) \in \mathcal{H}$ は局所有限かつ $s \times t$ は固有．

ここで空間 $X \in \mathcal{H}$ が**局所有限**であるとは，任意の $x \in X$ について，各ホモトピー群 $\pi_i(X, x)$ が有限群であり，かつ (x に依存する) $n \in \mathbb{N}$ が存在して $i > n$ ならば $\pi_i(X, x)$ が自明になることをいう．以下

$$\mathcal{H}^{\mathrm{lf}} \subset \mathcal{H}$$

を局所有限な空間のなす部分圏とする．また $\mathcal{H}^{\mathrm{lf}}$ の写像 $f : X \to Y$ が**固有**であるとは，任意の $y \in \pi_0(Y)$ に対して $|\{x \in \pi_0(X) \mid f(x) = y\}| < \infty$ となることをいう．

§1.1 の冒頭と同様に，$X \in \mathcal{H}$ に対し有限台を持つ関数 $X \to \mathbb{Q}$ のなす線形空間を $\mathbb{Q}_c(X)$ と書く．$\mathcal{H}^{\mathrm{lf}}$ の射 $f : X \to Y$ に対し線形写像 $f_! : \mathbb{Q}_c(X) \to \mathbb{Q}_c(Y)$ を

$$f_!(\alpha)(y) := \sum_{x \in \pi_0(X),\, f(x) = y} \alpha(x) \cdot \prod_{i > 0} \Big(|\pi_i(X, x)|^{(-1)^i} \ |\pi_i(Y, y)|^{(-1)^{i+1}} \Big)$$

で定義する．また固有射 $f : X \to Y$ に対し線形写像 $f^* : \mathbb{Q}_c(Y) \to \mathbb{Q}_c(X)$ を

$$f^*(\alpha)(x) := \alpha(f(x)) \quad (\alpha \in \mathbb{Q}_c(Y),\ x \in \pi_0(X))$$

で定義する．空間の局所有限性より f^* と $f_!$ が well-defined であることに注意する．

事実 (Toën [T06, Theorem 4.1])**.** D を局所有限な $\mathbb{F}_q$ 上の dg 圏とする．このとき

$$\mathrm{Hall}(\mathsf{D}) := \mathbb{Q}_c(X^{(0)}(\mathsf{D})), \quad \mu := c_! \circ (s \times t)^* : \mathrm{Hall}(\mathsf{D}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{Hall}(\mathsf{D}) \longrightarrow \mathrm{Hall}(\mathsf{D})$$

で単位元付き結合 $\mathbb{Q}$ 代数が定まる．この代数 $\mathrm{Hall}(\mathsf{D})$ を D の**導来 Hall 代数**と呼ぶ．

構成の仕方から，$\mathrm{Hall}(\mathsf{D})$ は $[M] \in \pi_0(X^{(0)}(\mathsf{D}))$ の特性関数 $1_{[M]}$ 達からなる $\mathbb{Q}$ 基底を持つ．$M \in X^{(0)}(\mathsf{D}) = \mathrm{N_{dg}}(\mathsf{P}(\mathsf{D}))$ はコファイブラントかつ完全な D の dg 加群であったことを思い出しておこう．

最後に Ringel-Hall 代数 (事実 1.1.1) との関係を説明しよう．A を有限次元 $\mathbb{F}_q$ 代数であって大域次元有限だとする．A 上の有限生成 (右) 加群圏に対して Ringel-Hall 代数が定まるが，それを $\mathrm{Hall}(A)$ と書く．一方で，

一つの対象からなり射の集合を A とし合成を A の積とする圏は, A を微分が自明な複体とみなすことで, $\mathbb{F}_q$ 上の dg 圏とみなせる. それを BA で表す. 有限生成 A 加群 M はその入射分解をとることでコファイブラントかつ完全な BA の dg 加群を定める. それも同じ記号 M で表すことにすると, $1_{[M]}$ 達が生成する $\mathrm{Hall}(BA)$ の部分代数 $\mathrm{Hall}_A(BA)$ を考えることができる.

事実 1.3.2 ([T06, Corollary 6.2])**.** 上記の状況において, Ringel-Hall 代数 $\mathrm{Hall}(A)$ は導来 Hall 代数 $\mathrm{Hall}(BA)$ の部分代数 $\mathrm{Hall}_A(BA)$ と同型である.

2 導来 Hall 代数の幾何学的構成の概要

2.1 Ringel-Hall 代数の Lusztig 構成

この節で幾何学的導来 Hall 代数の構成を概説する. その前に Lusztig による Ringel-Hall 代数の構成 [Lus92] について, モジュライ理論の立場からの註を述べたい. Lusztig の構成の詳細については [Lus92] および Schiffmann による概説記事 [S09] を参照されたい.

概要でも触れたように, Lusztig は箙の表現圏に関する Ringel-Hall 代数を表現のモジュライ空間上の構成可能層を用いて幾何学的構成に構成し, 特に標準基底の理論を作った. ここで考えるモジュライ空間は, Ringel-Hall 代数の定義から推測されるように, 箙の表現全てをパラメトライズするべきものである. 従って, 普通のモジュライ理論で用いられる, 安定性を課して幾何学的不変式論でもってスキームとして構成されるモジュライ空間は, Ringel-Hall 代数の定式化に関しては有効ではない. 表現全体のモジュライ空間は代数スタック, より正確には商スタックとして構成することができる. Lusztig の構成の基本的なアイデアは, Ringel-Hall 代数の基底をなす特性関数 $1_{[M]}$ をこのモジュライ・スタック上の構成可能関数とみなし, 代数の積を構成可能層に関する操作として函手的に構成する, というものである.

ここからは筆者の推測である. Lusztig が理論を構築した 1980 年代末において, 代数スタック上の構成可能層や導来圏, 導来函手の理論については未整備だったと思われる. むしろ Lusztig の理論や 1990 年代のモジュライ理論の発展に伴って, そういった理論の必要性が増したのだろう. 現在では Laumon と Moret-Bailly の本 [LM00] や Olsson の本 [O07] など, 標準的なテキストが存在するが, 30 年前はそれらはなかったのである.

Lusztig が採った方法は次の通りである. 表現のモジュライ空間が商スタック, つまりスキームを代数群 (この場合は一般線形群の直積) で「割った」ものであることに注意すると, 代数スタック上の構成可能層を考える必要はなく, 割る前のスキーム上の構成可能層であって代数群に関して同変なものを考えればよい. スキーム上の場合であれば, 同変構成可能層の導来圏や導来函手の理論は, よく知られている非同変の理論を真似すればよい, という算段だったのだろう.

さて推測は終わりにして, 結局のところ [Lus92] では, 箙の表現のモジュライ・スタックを考える代わりに代数群で割る前のスキーム上の同変構成可能層を用いて, Ringel-Hall 代数の構成が行われている. 現在では代数スタックを用いた定式化も可能であるが, 代数スタック上の構成可能層の導来函手の理論は Laszlo と Olsson によって比較的最近整備された [LO1, LO2] こともあって, Schiffmann の概説記事 [S09] の Introduction にその概要がコメントされているに留まっている. 我々の導来 Hall 代数の幾何学的構成の動機は, この表現のモジュライ・スタックを用いた Ringel-Hall 代数の構成の導来版を作りたい, というものである.

2.2 導来 Hall 代数の幾何学的構成

繰り返しになるが, モジュライ・スタックを用いた Ringel-Hall 代数の構成の導来版を作りたい, というのが我々の構成の動機である. そこでまず **dg 加群のモジュライ空間**, 雑に言えば複体のモジュライ空間を考える必要がある. 幸いなことに, そのようなモジュライ空間が既に構成されている:

事実 2.2.1 (Toën-Vaquié [TVa07])**.** D を局所有限な $\mathbb{F}_q$ 上の dg 圏とする. D 上のコファイブラント完全 dg 加群のモジュライ空間 $\mathcal{P}(\mathsf{D})$ が局所有限表示である**導来スタック**で構成できる.

導来スタックについては §3 で解説する. 局所有限表示性は定義 3.4.2 で与える. $\mathcal{P}(\mathsf{D})$ の閉点は §1.3 の $\mathsf{P}(\mathsf{D})$ の対象に対応している. 同様に D 上のコファイブラント完全 dg 加群のコファイブレーション $X \rightarrowtail Y$ のモジュライ空間も導来スタックで構成できるが, それを $\mathcal{G}(\mathsf{D})$ と表す.

§1.3 の図式 (1.3.1) の真似をして, 導来スタックの射

$$s, c, t : \mathcal{G}(\mathsf{D}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathsf{D})$$

であって $u : X \rightarrowtail Y$ を

$$s(u) = X, \quad c(u) = Y, \quad t(u) = Y \coprod^{X} 0$$

に写すものが存在する. これから導来スタックの図式

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(\mathsf{D}) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "p:=s\times t"'] & \mathcal{P}(\mathsf{D}) \\ \mathcal{P}(\mathsf{D}) \times \mathcal{P}(\mathsf{D}) & \end{tikzcd} \tag{2.2.1}$$

ができる. ここで $p = s \times t$ は潤滑 (§3.4 を参照せよ) である.

次に係数体 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ を考える. 但し ℓ と q は互いに素だと仮定する. すると $\mathbb{F}_q$ 上の幾何学的導来スタック $\mathcal{X}$ に対し, **構成可能 lisse-étale Λ 層の有界導来圏** $\mathsf{D}^b_{\mathrm{c}}(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を考えることができる (§4.2). そしてそれらの間の導来函手の理論をつくることができる (§4.3). これらの一般論を図式 (2.2.1) に適用して

$$\begin{tikzcd} \mathsf{D}^b_{\mathrm{c}}(\mathcal{G}(\mathsf{D}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[r, "\mathrm{R}c_!"] & \mathsf{D}^b_{\mathrm{c}}(\mathcal{P}(\mathsf{D}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ \mathsf{D}^b_{\mathrm{c}}(\mathcal{P}(\mathsf{D}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \times \mathsf{D}^b_{\mathrm{c}}(\mathcal{P}(\mathsf{D}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[u, "\mathrm{L}p^*"] & \end{tikzcd}$$

が得られる. そこで演算 μ を次のように定義する.

$$\mu : \mathsf{D}^b_{\mathrm{c}}(\mathcal{P}(\mathsf{D}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \times \mathsf{D}^b_{\mathrm{c}}(\mathcal{P}(\mathsf{D}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow \mathsf{D}^b_{\mathrm{c}}(\mathcal{P}(\mathsf{D}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \quad M \longmapsto \mathrm{R}c_! \, \mathrm{L}p^*(M)[\dim p].$$

定理 2.2.2. μ は結合的である.

以上が導来 Hall 代数の幾何学的定式化の概要である. 有限次元代数 A の場合の事実 1.3.2 と同様に, 有限生成 A 加群のモジュライスタックを $\mathcal{P}(\mathsf{D})$ の部分導来スタックとみなせば, 上の幾何学的構成をその部分導来スタックに制限することができ, Lusztig の幾何学的構成が再現される.

以下の §3 と §4 で導来スタックとその上の構成可能層の説明をする. 幾何学的定式化の詳しい説明と定理 2.2.2 の証明の概要は §4.4 で与える.

3 導来スタックの理論

この節では完全 dg 加群のモジュライ空間に関する事実 2.2.1 で言及した導来スタックに関する説明を行う．紙面の都合上, 説明は最低限に留める．詳しくは [Y, §§1–3] を参照して頂きたい．

導来スタックの理論は導来代数幾何学の範疇にあるが, 筆者の理解する限り定式化には二種類あって, 一つは Lurie 流のもの [Lur1, Lur2, Lur], もう一つは Toën-Vezzosi 流のもの [TVe05, TVe08] である．両者の大きな違いは, 基礎となる無限圏 (∞-category) および無限トポス (∞-topos) の理論が異なることであるが, その部分に関しては本質的には等価である (雑な言い方をすると, ホモトピーをとってしまえば同一視できる). 我々の動機に関しては [TVa07] による dg 加群のモジュライスタックの構成がとりあえずは必要なので, その点では Toën-Vezzosi 流のものを採用する方が楽ではある．しかしプレプリント [Y] では Lurie 流の定式化に基づいた議論をすることにした．その理由は, 第一に導来スタック上の構成可能層の定義に必要な基礎的概念については Lurie 流の方がよく準備されているから, 第二に導来代数幾何学の諸論文では Lurie 流を採用している方が多い印象を筆者が受けているからである．

3.1 無限圏と Grothendieck 位相

この副説では無限圏と無限トポスについて必要最低限の説明を行う．詳しくは [Lur1] を参照されたい．この本は分厚さに圧倒されてしまうが, 論理的ギャップが殆どない明解な本で, 筆者のような代数トポロジーの初心者でも (やる気さえあれば) 読めるものである．

§1.2 と同様に n 単体を Δ^n と書く．また $0 \le j \le n$ に対し $\Lambda^n_j \subset \Delta^n$ を Δ^n の j-th horn とする．

定義 3.1.1. **無限圏**とは弱 Kan 複体のことである．つまり単体的集合 K であって, 任意の $n \in \mathbb{N}$ と $0 < i < n$ に対し, 任意の単体的写像 $f : \Lambda^n_i \to K$ が $\overline{f} : \Delta^n \to K$ に拡張できるもののことをいう．

また無限圏の函手 $K \to L$ とは単体的写像のことである．それらが定める無限圏を $\mathsf{Fun}_\infty(K, L)$ と書く．

単体的集合 $K : \mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ に対して $K([0])$ の元を K の頂点, $K([1])$ の元を K の辺と呼ぶ．無限圏は通常の圏と次のように対応する．

- 無限圏 K の頂点を K の対象と呼び, 辺を K の射と呼ぶ．
- ナーブ構成によって圏 C から無限圏 $\mathrm{N}(\mathsf{C})$ が得られる．その対象や射は C の対象や射と一致する．

以下では X が無限圏 K の対象であることを $X \in K$ と書く．無限圏 K の対象 K について, その over-∞-category と under-∞-category [Lur1, §1.2.9] をそれぞれ $K_{/X}$ と $K_{X/}$ で表す．

次に**空間の無限圏** (∞-category of spaces) について簡単に説明する．単体的集合の圏 sSet において Kan 複体 (無限圏の定義 3.1.1 において $0 \le i \le n$ としたもの) のなす充満部分圏を Kan と書く．

sSet の対象 X, Y に対して, $\mathrm{Map}_{\mathsf{sSet}}(X, Y) \in \mathsf{sSet}$ であって $\pi_0 \mathrm{Map}_{\mathsf{sSet}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{sSet}}(X, Y)$ となるものが定まる．このように sSet-enrich された圏を**単体的圏** (simplicial category) と呼ぶ．Kan も $\mathrm{Map}_{\mathsf{Kan}}(\ ,\ ) \subset \mathrm{Map}_{\mathsf{sSet}}(\ ,\ )$ によって単体的圏とみなせる．

一方, 単体的圏から単体的対象を作る**単体的ナーブ構成** (simplicial nerve construction) $\mathrm{N}_{\mathrm{sp}}(\ )$ がある [Lur1, Definition 1.1.5.6]. これを単体的圏 Kan に用いて次の定義を得る:

定義 3.1.2. $\mathcal{S}_\infty := \mathrm{N}_{\mathrm{sp}}(\mathsf{Kan})$ は無限圏であり, **空間の無限圏**と呼ばれる．

$\mathcal{S}_\infty$ の名前の由来は Quillen の圏同値

$$\mathrm{Ho}\,\mathcal{S}_\infty \simeq \mathcal{H}$$

である．ここで $\mathcal{H}$ は空間のホモトピー圏 (1.2.1).

最後に無限圏の Grothendieck 位相について説明する．詳しくは [Lur1, §6.2.2] や [TVe05] を参照せよ．

定義 3.1.3. C を無限圏とする．

(1) C の**篩** (sieve) とは充満部分無限圏 $\mathsf{C}^{(0)} \subset \mathsf{C}$ であって，任意の $Y \in \mathsf{C}^{(0)}$ と C の射 $f : X \to Y$ について $X \in \mathsf{C}^{(0)}$ となるもののことをいう．

(2) $X \in \mathsf{C}$ **の篩**とは over-∞-category $\mathsf{C}_{/X}$ の篩のことである．

無限圏の函手 $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ と篩 $\mathsf{D}^{(0)} \subset \mathsf{D}$ に対し $F^{-1}\mathsf{D}^{(0)} := \mathsf{D}^{(0)} \times_{\mathsf{D}} \mathsf{C} \subset \mathsf{C}$ は C の篩である．但し $\times_{\mathsf{D}}$ はホモトピーファイバー積．また C の射 $f : X \to Y$ に対し over-∞-category の間の函手 $f_* : \mathsf{C}_{/X} \to \mathsf{C}_{/Y}$ が自然に定まる．そこで Y の篩 $\mathsf{C}^{(0)}_{/Y}$ に対し X の篩を $f^*\mathsf{C}^{(0)}_{/Y} := (f_*)^{-1}\mathsf{C}^{(0)}_{/Y}$ と定めることができる．

定義 3.1.4. C を無限圏とする．C 上の **Grothendieck 位相** τ とは各 $X \in \mathsf{C}$ の篩の族 $\mathrm{Cov}(X)$ が定まっていて以下の三条件が満たされることをいう．

(i) 任意の $X \in \mathsf{C}$ に対し $\mathsf{C}_{/X}$ は $\mathrm{Cov}(X)$ に含まれる．

(ii) 任意の C の射 $f : X \to Y$ と任意の $\mathsf{C}^{(0)}_{/Y} \in \mathrm{Cov}(Y)$ に対し $f^*\mathsf{C}^{(0)}_{/Y} \in \mathrm{Cov}(X)$.

(iii) $Y \in \mathsf{C}$ および $\mathsf{C}^{(0)}_{/Y} \in \mathrm{Cov}(Y)$ について，もし $\mathsf{C}^{(1)}_{/Y}$ が Y の篩であって任意の $\mathsf{C}^{(0)}_{/Y}$ の対象 $f : X \to Y$ に対して $f^*\mathsf{C}^{(1)}_{/Y} \in \mathrm{Cov}(X)$ となるならば，$\mathsf{C}^{(1)}_{/Y} \in \mathrm{Cov}(Y)$ である．

$\mathrm{Cov}(X)$ を X **の被覆篩** (covering sieves) の族とよぶ．τ を強調したいときは $\mathrm{Cov}_\tau(X)$ と書く．

また無限圏 C とその上の Grothendieck 位相 τ の対 (C, τ) のことを**無限トポス**と呼ぶ．

C が通常の圏のナーブならば，上記の Grothendieck 位相は通常の圏の Grothendieck 位相と本質的に同じ概念である．後の定義 3.3.2 で無限圏上の Grothendieck 位相の例を紹介する．

3.2 導来代数幾何

次に導来代数幾何について簡単に説明する．非常に大雑把に言うと，スキーム論や代数スタックの理論における集合を単体的集合に置き換え，特に可換環を単体的可換環におきかえることで導来版の理論が得られる．

可換環 k を固定する．可換 k 代数の圏を Com と書く．Com の単体的対象，つまり函手 $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Com}$ を**単体的可換 k 代数**と呼ぶ．それらの圏 $\mathsf{sCom} := \mathsf{Fun}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Com})$ から，$\mathsf{sCom} \subset \mathsf{sSet}$ とみなして弱同値のクラスで局所化することで無限圏 sCom_∞ が得られる．単体的可換 k 代数 $A \in \mathsf{sCom}_\infty$ は単体的集合なのでホモトピー群 $\pi_i(A)$ が定まる．このとき $\pi_0(A)$ は可換 k 代数であり，各 $\pi_i(A)$ は $\pi_0(A)$ 加群である．

k 上のアフィンスキームの圏が $(\mathsf{Com})^{\mathrm{op}}$ と同値であることを思い出して，次の定義を考える．

定義 3.2.1. $\mathsf{dAff}_\infty := (\mathsf{sCom}_\infty)^{\mathrm{op}}$ を**アフィン導来スキーム**の無限圏と呼ぶ．

但し op は無限圏 (あるいは単体的集合) としての反対 (opposite) [Lur, §A.2.7] を意味する．$A \in \mathsf{sCom}_\infty$ に対応するアフィン導来スキームを U とすると，U に対しアフィンスキーム $\mathrm{Spec}\,\pi_0(A)$ を対応させることができる．これを $\pi_0(U) := \mathrm{Spec}\,\pi_0(A)$ と書く．

以降の議論では直接は用いないが，**導来スキーム**について簡単に説明しよう．位相空間 X 上の sCom_∞ に係

数を持つ層のなす無限圏を $\mathsf{sCom}_\infty(X)$ と書く．位相空間 X と $\mathcal{O}_X \in \mathsf{sCom}_\infty(X)$ の組を導来環付き空間とよび，それらのなす無限圏を dRgSp_∞ と書く．そして $\mathsf{dSch}_\infty \subset \mathsf{dRgSp}_\infty$ を次の二条件を満たす対象 $(X, \mathcal{O}_X)$ の張る部分無限圏とする．dSch_∞ の対象を導来スキームと呼ぶ．

(i) $(X, \pi_0(\mathcal{O}_X))$ はスキーム．

(ii) 各 $n \in \mathbb{N}$ について $\pi_n(\mathcal{O}_X)$ は $\pi_0(\mathcal{O}_X)$ 加群の準連接層．

3.3 導来スタック

次に導来スタックについて説明する．導来スタックは dAff_∞ に Grothendieck 位相 τ を入れて得られる無限トポス $(\mathsf{dAff}_\infty, \tau)$ 上の層として定義できる．

定義 3.3.1. τ を dAff_∞ 上の Grothendieck 位相とする．**導来スタック**の無限圏 dSt_∞ を次のように定義する

$$\mathsf{dSt}_\infty := \mathsf{Sh}_{\infty,\tau}(\mathsf{dAff}_\infty)^\wedge \subset \mathsf{Fun}_\infty((\mathsf{dAff}_\infty)^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}_\infty).$$

ここで $\mathsf{Sh}_{\infty,\tau}(\mathsf{dAff}_\infty)^\wedge$ は Grothendieck 位相 τ に関する層のうち hypercomplete [Lur1, §6.5.2] であるものがなす部分無限圏である．また $\mathcal{S}_\infty$ は空間の無限圏 (定義 3.1.2) である．

dAff_∞ 上の Grothendieck 位相の例としてエタール位相を紹介する:

定義 3.3.2. sCom_∞ の射 $A \to B$ が**エタール**であるとは次の二条件が満たされることをいう．

(i) 誘導される可換 k 代数の射 $\pi_0(A) \to \pi_0(B)$ がエタールである．

(ii) 任意の i について，誘導される $\pi_0(B)$ 加群の射 $\pi_i(A) \otimes_{\pi_0(A)} \pi_0(B) \to \pi_i(B)$ が同型である．

同様に sCom_∞ の**潤滑射**，**平坦射**，**有限型射**，**有限表示射**も定義できる．

エタール射から dAff_∞ の Grothendieck 位相が定まるが，それをエタール位相と呼ぶ．

3.4 幾何学的導来スタック

通常の代数幾何学においては，スタックのうち幾何学的に良くふるまうものを代数スタック (algebraic stack) と呼んで区別する ([LM00, O16] を参照)．定義 3.3.1 の導来スタックは通常の代数幾何学におけるスタックに対応するものである．通常の意味での代数スタックに対応するのが**幾何学的導来スタック** [TVe08] である．その定義を説明しよう．

定義 3.4.1 ([TVe08, §1.3.3])**.** $n \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ に対し n **幾何学的導来スタック** (n-geometric derived stack) を以下のように帰納的に定義する．また同時に n **アトラス** (n-atlas)，n **表現可能射** (n-representable morphism) 及び n **潤滑射** (n-smooth morphism) を定義する．

- $n = -1$ とする．
  (1) (-1)-**幾何学的導来スタック**とはアフィン導来スキーム (定義 3.2.1) のこととする．
  (2) 導来スタックの射 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が (-1) **表現可能**であるとは，任意のアフィン導来スキーム U と任意の導来スタックの射 $U \to \mathcal{Y}$ に対し，$\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U$ がアフィン導来スキームになることをいう．
  (3) 導来スタックの射 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が (-1) **潤滑**であるとは，(-1) 表現可能かつ，任意のアフィン導来スキーム U と任意の導来スタックの射 $U \to \mathcal{Y}$ に対し，$\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U \to U$ がアフィンスキームの潤滑射 (定義 3.3.2) であることをいう．
  (4) 導来スタック $\mathcal{X}$ の (-1) アトラスとは $\{\mathcal{X}\}$ のことである．

- $n \in \mathbb{N}$ とする.
  (1) $\mathcal{X}$ を導来スタックとする. $\mathcal{X}$ **の n アトラス**とは導来スタックの射の族 $\{U_i \to \mathcal{X}\}_{i \in I}$ であって以下の条件を満たすもののこととする.
    - 各 U_i はアフィン導来スキーム.
    - 各 $U_i \to \mathcal{X}$ は $(n-1)$ 潤滑射.
    - $\coprod_{i \in I} U_i \to \mathcal{X}$ は全射.

  (2) 導来スタック $\mathcal{X}$ は以下の条件を満たすとき n **幾何学的**であるという.
    - 対角射 $\mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ は $(n-1)$ 表現可能.
    - $\mathcal{X}$ の n アトラスが存在する.

  (3) 導来スタックの射 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ は次の条件を満たすとき n **表現可能**であるという: 任意のアフィン導来スキーム U と任意の導来スタックの射 $U \to \mathcal{Y}$ に対し, 導来スタック $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U$ は n 幾何学的.
  (4) 導来スタックの射 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ は次の条件を満たすとき n **潤滑**であるという: 任意のアフィン導来スキーム U と任意の導来スタックの射 $U \to \mathcal{Y}$ に対し, ある $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U$ の n アトラス $\{U_i\}_{i \in I}$ が存在して, 各 $i \in I$ に対し合成 $U_i \to \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U \to U$ がアフィン導来スキームの潤滑射である.

幾何学的導来スタックとはある $n \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ に関する n 幾何学的導来スタックのことをいう. 同様にアトラス, 表現可能射, 潤滑射が定義される.

また dSt_∞ において幾何学的導来スタック $\mathcal{X}_i$ のフィルター余極限 $\varinjlim_i \mathcal{X}_i$ と同型なものを**局所幾何学的導来スタック**という.

幾何学的導来スタックの性質を一つだけ紹介する.

事実 (Toën-Vezzossi [TVe08, Proposition 2.1.2.1]). 代数スタック $\mathcal{X}$ に対し導来スタック $j(\mathcal{X})$ を函手的に対応させることができる. 更に $j(\mathcal{X})$ は 1 幾何学的である.

最後に導来スタックの射に関する性質の定義を紹介しよう. 定義 3.3.2 で sCom_∞ のエタール射, 平坦射, 有限型射, 有限表示射を与えたことを思い出そう.

定義 ([TVe08, Definition 1.3.6.2, Lemma 2.2.3.4]). $\mathbf{Q}$ を定義 3.3.2 で与えた sCom_∞ の射に関する性質とする. **導来スタックの射 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が性質 $\mathbf{Q}$ を持つ**とは, それが適当な n について n 表示可能であり, さらに任意のアフィン導来スキーム U からの導来スタックとしての射 $U \to Y$ に対して, $X \times_Y U$ の n アトラス $\{U_i\}_{i \in I}$ が存在して, 各 i について射 $U_i \to X \times_Y U \to U$ に対応する sCom_∞ の射が定義 3.3.2 の意味で性質 Q を持つことをいう.

この節では可換環 k 上で考えているため, 導来スタック $\mathcal{X}$ には構造射 $\operatorname{Spec} k \to \mathcal{X}$ が存在する. この構造射について上の定義を適用したものは, 少し簡単に言い換えることができる. 有限表示の場合に述べると, 次のようになる.

定義 3.4.2. 幾何学的導来スタックが**有限表示**であるとは, アトラス $\{U_i = \operatorname{Spec} A_i\}_i$ であって各 $A_i \in \mathsf{sCom}_\infty$ が有限表示であるものが存在することをいう.

また dSt_∞ において有限表示である幾何学的導来スタック $\mathcal{X}_i$ のフィルター余極限 $\varinjlim_i \mathcal{X}_i$ と同型なものを**局所有限表示である導来スタック**という.

4　導来スタック上の構成可能層

この節でプレプリント [Y] の本論の解説を行う．§4.1 と §4.2 では [Y, §5] で導入した導来スタック上の構造可能 lisse-étale 層の導来圏を，§4.3 では [Y, §6, §7] で構成した導来函手の理論を説明する．そして §4.4 で導来 Hall 代数の定式化 [Y, §9, §10] をより詳しく説明する．

4.1　構造可能 lisse-étale 層

代数スタック上の構造可能層の定義には lisse-étale トポスが用いられた [LM00, O16]．その導来類似として **lisse-étale 無限トポス**を導入する．

導来スタック $\mathcal{X}$ に対し，$\mathsf{dAff}_\infty/\mathcal{X} \subset (\mathsf{dSt}_\infty)_{/\mathcal{X}}$ をアフィン導来スキームのなす充満部分無限圏とする．

定義 ([Y, §5.1])**.** $n \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ とし，また $\mathcal{X}$ を n 幾何学的導来スタックとする．$\mathcal{X}$ 上の **lisse-étale 無限トポス**

$$\mathsf{Lis\text{-}Et}^n_\infty(\mathcal{X}) = (\mathsf{Lis}^n_\infty(\mathcal{X}), \text{lis-et})$$

を次で定める．

- $\mathsf{Lis}^n_\infty(\mathcal{X}) \subset \mathsf{dAff}_\infty/\mathcal{X}$ を n 潤滑な射 $u : U \to \mathcal{X}$ のなす充満部分無限圏とする．
- $(U, u) \in \mathsf{Lis}^n_\infty(\mathcal{X})$ の被覆篩 $\mathrm{Cov}_{\text{lis-et}}(U, u)$ は $\{(U_i, u_i) \to (U, u)\}_{i \in I} \subset \mathsf{Lis}^n_\infty(\mathcal{X})$ であって $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ がエタール被覆になるものとする．

また定義 3.3.1 の記号 $\mathsf{Sh}_{\infty,\tau}(\ )$ を用いて，

$$\mathsf{Sh}_{\infty,\text{lis-et}}(\mathsf{Lis}_\infty(\mathcal{X})) \subset \mathsf{Fun}_\infty(\mathsf{Lis}_\infty(\mathcal{X}), \mathcal{S}_\infty)$$

の対象を $\mathcal{X}$ 上の **lisse-étale 層**と呼ぶ．

次に通常のスキーム上の**構成可能層**を思い出しておこう：スキーム X 上の層 $\mathcal{F}$ が構成可能であるとは，任意のアフィン開部分スキーム $U \subset X$ について，$\mathcal{F}|_{U_i}$ が有限集合に値を持つ局所定数層になるような構成可能な局所閉部分スキーム U_i への有限分割 $U = \bigcup_i U_i$ が存在することをいう．

この定義にならって構成可能層の概念の導来版を導入しよう．定義 3.2.1 の直後の説明と同様に，アフィン導来スキーム U に付随するアフィンスキームを $\pi_0(U)$ と書く．

定義 4.1.1 ([Y, §5.4])**.** $\mathcal{X}$ を幾何学的導来スタックとする．$\mathcal{X}$ 上の lisse-étale 層 $\mathcal{F}$ が**構成可能**であるとは，cartesian [LM00, Chap. 12] であり，かつ任意の $U \in \mathsf{Lis\text{-}Et}_\infty(\mathcal{X})$ について制限 $\pi_0(\mathcal{F})|_{\pi_0(U)}$ が $\pi_0(U)$ 上の (通常の意味での) 構成可能層となることをいう．

可換環 Λ に対し単体的 Λ 加群の無限圏を $\mathsf{sMod}_\infty(\Lambda)$ と書く．

定義 ([Y, §5.4])**.** $\mathcal{X}$ を幾何学的導来スタック，Λ を可換環とする．$\mathcal{X}$ 上の**単体的 Λ 加群の構成可能 lisse-étale 層**を $\mathsf{D}_\infty(\mathcal{X}, \Lambda) := \mathsf{Sh}_{\infty,\text{lis-et}}(\mathsf{Lis}_\infty(\mathcal{X}), \mathsf{sMod}_\infty(\Lambda))$ の対象であって定義 4.1.1 の意味で構成可能なものとする．それらのなす部分無限圏を次の記号で表す．

$$\mathsf{D}_{\infty,c}(\mathcal{X}, \Lambda) \subset \mathsf{D}_\infty(\mathcal{X}, \Lambda).$$

4.2 構成可能層の導来圏

前節で導入した構成可能 lisse-étale 層の無限圏 $\mathsf{D}_{\infty,\mathrm{c}}(\mathcal{X},\Lambda)$ は次のような性質を満たす.

命題. $\mathcal{X}$ を幾何学的導来スタックとし, Λ を可換環とする. 無限圏 $\mathsf{D}_{\infty,\mathrm{c}}(\mathcal{X},\Lambda)$ は Lurie [Lur2] の意味で安定である. 特にホモトピー圏 $\mathrm{Ho}\,\mathsf{D}_{\infty,\mathrm{c}}(\mathcal{X},\Lambda)$ は三角圏の構造を持つ.

安定無限圏の説明の前に導来圏の記号を導入しておく.

定義. $\mathcal{X}$ を幾何学的導来スタックとし, Λ を可換環とする. $\mathcal{X}$ 上の**構成可能 lisse-étale 層の導来圏**を

$$\mathsf{D}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\Lambda) := \mathrm{Ho}\,\mathsf{D}_{\infty,\mathrm{c}}(\mathcal{X},\Lambda)$$

で定義する. また左有界 [右有界, 有界] 導来圏を $\mathsf{D}^*_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\Lambda) \subset \mathsf{D}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\Lambda)$ $(* \in \{+,-,b\})$ と書く.

この副節の残りの部分で, Lurie [Lur2] の意味での安定無限圏 (stable ∞-category) を紹介する. 詳しい説明は [Lur2, Chap. 1] を参照されたい. また [Y, Appendix D] にも簡単な説明がある.

定義. 無限圏 C は以下の三条件件を満たすとき**安定**であるという.

- 零対象 $0 \in \mathsf{C}$ をもつ (零対象の定義は [Lur2, Definition 1.1.1.1] 参照).
- 任意の射はファイバーとコファイバーを持つ.
- C の三角が引き戻し正方図式 (pullback square) であることと押し出し正方図式 (pushout square) であることは同値.

但し零対象をもつ無限圏 C の三角 (triangle) とは次の形の正方図式のことである.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

安定無限圏 C に対して懸垂函手 (suspension functor) $\Sigma : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ とループ函手 (loop functor) $\Omega : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ が定義できる [Lur2, §1.1.2]. それを以下で説明しよう.

$\mathsf{M}^\Sigma \subset \mathsf{Fun}_\infty(\Delta^1 \times \Delta^1, \mathsf{C})$ を次の形の押し出し正方図式のはる充満部分無限圏とする:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

ここで 0 と $0'$ は C の零対象. C の射はコファイバーを持つので, X で評価することで trivial fibration $i : \mathsf{M}^\Sigma \to \mathsf{C}$ が得られる. 同様に Y での評価から trivial fibration $f : \mathsf{M}^\Sigma \to \mathsf{C}$ が得られる. $s : \mathsf{C} \to \mathsf{M}^\Sigma$ を i の切断とする.

定義. $\Sigma := f \circ s : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ を懸垂函手と呼ぶ. 双対的にループ函手 $\Omega : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ も定まる.

通常通り, $n \in \mathbb{N}$ に対し, 懸垂函手の n 回合成 Σ^n を $X \mapsto X[n]$ と書く. またループ函手の n 回合成 Ω^n を $X \mapsto X[-n]$ と書く. これらは $n \in \mathbb{Z}$ に対してホモトピー圏 $\mathrm{Ho}\,\mathsf{C}$ の上の函手 $[n] : \mathrm{Ho}\,\mathsf{C} \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{C}$ を定める.

最後に安定無限圏 C のホモトピー圏 $\mathrm{Ho}\,\mathsf{C}$ の持つ三角圏の構造を説明する. $\mathrm{Ho}\,\mathsf{C}$ の図式

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

が特三角であるとは, C の図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \arrow[d] \\ 0' \arrow[r] & Z \arrow[r, "\widetilde{h}"'] & W \end{tikzcd}$$

であって以下の四性質を満たすものが存在することをいう:

- $0, 0' \in \mathsf{C}$ は零対象.
- 二つの正方図式はともに C の押し出し図式.
- C の射 $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ は $\mathrm{Ho}\,\mathsf{C}$ の射 f, g を代表する.
- h は $\widetilde{h}$ のホモトピー類と外周りの長方形から定まる同値 $W \simeq X[1]$ との合成と一致する.

事実 4.2.1 ([Lur2, Theorem 1.1.2.14])**.** 安定無限圏 C に対し, $[1] = \Sigma : \mathrm{Ho}\,\mathsf{C} \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{C}$ と特三角達によって $\mathrm{Ho}\,\mathsf{C}$ に三角圏の構造が定まる.

この事実をもとに, 三角圏の諸概念を安定無限圏に持ち上げることができる. 例えば:

定義. 安定無限圏 C の **t 構造**とはホモトピー圏 $\mathrm{Ho}\,\mathsf{C}$ の t 構造のことをいう.

以上で述べた安定無限圏の理論は Abel 圏から構成される導来圏の理論と整合的である. そのことを説明するのに, Lurie [Lur2, §1.3] の導来無限圏を紹介する. §1.3 でも言及したが, 可換環 K 上の dg 圏 D に対し, dg ナーブ構成により単体的集合 $\mathrm{N}_{\mathrm{dg}}(\mathsf{D})$ が構成できる. さて入射的対象を豊富に持つ Abel 圏 A に対し, その対象からなる複体のなす dg 圏 $\mathsf{C}(\mathsf{A})$ を考える. $\mathsf{C}^+(\mathsf{A}_{\mathrm{inj}}) \subset \mathsf{C}(\mathsf{A})$ を入射的対象からなる下に有界な複体のなす充満部分圏とする. これに dg ナーブ構成を適用した

$$\mathsf{D}^+_\infty(\mathsf{A}) := \mathrm{N}_{\mathrm{dg}}(\mathsf{C}^+(A_{\mathrm{inj}}))$$

は安定無限圏である [Lur2, Corollary 1.3.2.8]. これを A の**導来無限圏**と呼ぶ.

$\mathsf{D}^+_\infty(\mathsf{A})$ は次のような t 構造を持つ. $n \in \mathbb{Z}$, $M \in \mathsf{D}^+_\infty(\mathsf{A})$ に対して $H_n(M) := \pi_0(M[n]) \in \mathrm{N}(\mathsf{A})$ とし, $n < 0$ なら $H_n(M) \simeq 0$ となる M 達の充満部分圏を $\mathsf{D}^+_\infty(\mathsf{A})_{\geq 0} \subset \mathsf{D}^+_\infty(\mathsf{A})$ と書く. $\mathsf{D}^+_\infty(\mathsf{A})_{\leq 0}$ も同様に定めると, 組 $(\mathsf{D}^+_\infty(\mathsf{A})_{\leq 0}, \mathsf{D}^+_\infty(\mathsf{A})_{\geq 0})$ が t 構造を定める [Lur2, Corollary 1.3.2.8]. 特に $\mathsf{D}^+_\infty(\mathsf{A})^\heartsuit := \mathsf{D}^+_\infty(\mathsf{A})_{\leq 0} \cap \mathsf{D}^+_\infty(\mathsf{A})_{\geq 0}$ は $\mathrm{N}(\mathsf{A})$ と同値になる.

ホモトピー圏をとると, $\mathrm{Ho}\,\mathsf{D}^+_\infty(\mathsf{A})$ は A の下に有界な導来圏 $\mathsf{D}^+(\mathsf{A})$ と三角圏として同値であり, 上記の t 構造は $\mathsf{D}^+(\mathsf{A})$ の標準的な t 構造と一致する.

4.3 導来函手の構成

4.3.1 有限体係数の場合

前副節 §4.2 で導入した構成可能層の導来圏 $\mathsf{D}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X}, \Lambda)$ について, Λ が有限体の場合 (より一般的に Gorenstein 局所環であって次元 0, 標数 $\ell > 0$ の場合), Grothendieck の六つの導来函手の類似が定義できる. つまり, 局所有限表示な導来スタック $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ の間の局所有限表示射 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ に対して

$$\mathrm{R}f_* : \mathsf{D}^+_{\mathrm{c}}(\mathcal{X}, \Lambda) \longrightarrow \mathsf{D}^+_{\mathrm{c}}(\mathcal{Y}, \Lambda), \quad \mathrm{R}f_! : \mathsf{D}^-_{\mathrm{c}}(\mathcal{X}, \Lambda) \longrightarrow \mathsf{D}^-_{\mathrm{c}}(\mathcal{Y}, \Lambda),$$
$$\mathrm{L}f^* : \mathsf{D}_{\mathrm{c}}(\mathcal{Y}, \Lambda) \longrightarrow \mathsf{D}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X}, \Lambda), \quad \mathrm{R}f^! : \mathsf{D}_{\mathrm{c}}(\mathcal{Y}, \Lambda) \longrightarrow \mathsf{D}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X}, \Lambda)$$

および $\mathcal{RH}om$ と $\otimes^{\mathrm{L}}$ が定義できる．ここでは §2.2 の導来 Hall 代数の構成で用いた $\mathrm{R}f_!$ と $\mathrm{L}f^*$ を中心に説明しよう．

$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ を有限表示導来スタックの潤滑射とする．

$$f_* : \mathsf{D}_\infty(\mathcal{X}, \Lambda) \longrightarrow \mathsf{D}_\infty(\mathcal{X}, \Lambda), \quad (f_*\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(U \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X})$$

と定義すれば，ホモトピー圏に遺伝して三角函手 $\mathrm{R}f_* : \mathsf{D}(\mathcal{X}, \Lambda) \to \mathsf{D}(\mathcal{Y}, \Lambda)$ が定まる．代数スタックの場合 [O07, §9.9] と同様に，$\mathrm{R}f_*$ は $\mathsf{D}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X}, \Lambda)$ を $\mathsf{D}_{\mathrm{c}}(\mathcal{Y}, \Lambda)$ に写すとは限らないことに注意する．しかし f が有限表示ならば $\mathrm{R}f_* : \mathsf{D}^+_{\mathrm{c}}(\mathcal{X}, \Lambda) \to \mathsf{D}^+_{\mathrm{c}}(\mathcal{Y}, \Lambda)$ が定まることが示せる [Y, §6.2].

shrink functor $f_!$ は，代数スタックの場合の Laszlo-Olsson の構成 [LO1] を真似して，f_* と**双対化対象** (dualizing object) を用いて定義する．局所有限表示な幾何学的導来スタック $\mathcal{X}$ に対して双対化対象を

$$\Omega_{\mathcal{X}} \in \mathsf{D}_\infty(\mathcal{X}, \Lambda)$$

構成することができる．その詳細は [Y, §5.5] に譲るが，基本的なアイデアは [LO1] と同様で，エタール局所的に (つまり sCom_∞ において) 定義しておいて，それを張り合わせるというものである．また Λ が有限体であるという仮定 (または冒頭にあげたより一般の仮定) はここで用いる．対応する双対化函手

$$D_{\mathcal{X}} := \mathcal{H}om(\ , \Omega_{\mathcal{X}}) : \mathsf{D}_\infty(\mathcal{X}, \Lambda) \longrightarrow \mathsf{D}_\infty(\mathcal{X}, \Lambda)^{\mathrm{op}}$$

は次の双対性を満たす [Y, Proposition 5.5.13].

(1) 自然な射 $\mathrm{id} \to D_{\mathcal{X}} \circ D_{\mathcal{X}}$ は函手の無限圏において同値.

(2) $M, N \in \mathsf{D}_{\infty,\mathrm{c}}(\mathcal{X}, \Lambda)$ において canonical な同値 $\mathcal{H}om(M, N) \simeq \mathcal{H}om(D_{\mathcal{X}}(N), D_{\mathcal{X}}(M))$ がある.

この双対化函手を用いて，局所有限表示な幾何学的導来スタックの有限表示射 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ に対し

$$f_! := D_{\mathcal{Y}} \circ f_+ \circ D_{\mathcal{X}} : \mathsf{D}^-_{\infty,\mathrm{c}}(\mathcal{X}, \Lambda) \longrightarrow \mathsf{D}^-_{\infty,\mathrm{c}}(\mathcal{X}, \Lambda)$$

と定義する．これはホモトピー圏に遺伝して，三角函手 $\mathrm{R}f_! : \mathsf{D}^-_{\mathrm{c}}(\mathcal{X}, \Lambda) \to \mathsf{D}^-_{\mathrm{c}}(\mathcal{Y}, \Lambda)$ が定まる [Y, §6.6].

逆像函手 f^* の構成はより複雑である [Y, §6.3]．まず幾何学的導来スタック $\mathcal{X}$ のアトラス $\{U_i\}_{i\in I}$ を一つとる $X_0 = \coprod_{i\in I} U_i$ とし，自然に定まる導来スタックの射 $X_0 \to \mathcal{X}$ を用いて各 $k \in \mathbb{N}$ に対し $X_k = X_0 \times_{\mathcal{X}} \cdots \times_{\mathcal{X}} X_0$ (k 重ファイバー積) とし，$X_\bullet := \{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ が定まる．潤滑全射 $X_k \to \mathcal{X}$ によって $e_X : X_\bullet \to \mathcal{X}$ も定まる．これを $\mathcal{X}$ のコスケルトン (coskelton) と呼ぶ．

次に $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ を n 幾何学的導来スタックの射とする．$e_X : X_\bullet \to \mathcal{X}$ と $e_Y : Y_\bullet \to \mathcal{Y}$ をコスケルトンとすると，$f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ が自然に定まる．これから次の可換図式が定まる．

$$\begin{tikzcd} X_\bullet \arrow[r, "f_\bullet"] \arrow[d, "e_X"'] & Y_\bullet \arrow[d, "e_Y"] \\ \mathcal{X} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

sCom_∞ のエタール射 (定義 3.3.2) から定まる dSt_∞ のエタール位相を et と書く．すると $f_\bullet$ から無限トポスの射

$$f_{\bullet,\mathrm{et}} : X_{\bullet,\mathrm{et}} \longrightarrow Y_{\bullet,\mathrm{et}}$$

が定まる．$\mathsf{Mod}_\infty(X_{\bullet,\mathrm{et}},\Lambda)$ で $X_{\bullet,\mathrm{et}}$ 上の Λ 加群エタール層のなす無限圏を表すと，次のような函手 $f_\bullet^*$ が定まる．

$$f_\bullet^* : \mathsf{Mod}_\infty^{\mathrm{cart}}(Y_{\bullet,\mathrm{et}},\Lambda) \longrightarrow \mathsf{Mod}_\infty^{\mathrm{cart}}(X_{\bullet,\mathrm{et}},\Lambda)\,.$$

ここで cart は cartesian [LM00, Chap. 12] な層のなす充満部分無限圏を意味する．一方，降下の議論によって以下の同値が存在する．

$$r_{\mathcal{X}} : \mathsf{Mod}_\infty^{\mathrm{cart}}(\mathcal{X}_{\text{lis-et}},\Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Mod}_\infty(X_{\bullet,\mathrm{et}},\Lambda)\,, \quad r_{\mathcal{Y}} : \mathsf{Mod}_\infty^{\mathrm{cart}}(\mathcal{Y}_{\text{lis-et}},\Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Mod}_\infty(Y_{\bullet,\mathrm{et}},\Lambda)\,.$$

以上の準備の下，函手 f^* を次のように定義する．

$$f^* := r_{\mathcal{X}}^{-1} \circ f_\bullet^* \circ r_{\mathcal{Y}} : \mathsf{Mod}_\infty^{\mathrm{cart}}(\mathcal{Y}_{\text{lis-et}},\Lambda) \longrightarrow \mathsf{Mod}_\infty^{\mathrm{cart}}(\mathcal{X}_{\text{lis-et}},\Lambda)\,.$$

f が有限表示であれば，これから構成可能層の函手

$$f^* : \mathsf{D}^+_{\infty,\mathrm{c}}(\mathcal{Y},\Lambda) \longrightarrow \mathsf{D}^+_{\infty,\mathrm{c}}(\mathcal{X},\Lambda)$$

が定まり，そしてホモトピー圏に導来函手が誘導される:

$$\mathrm{L}f^* : \mathsf{D}_{\mathrm{c}}(\mathcal{Y},\Lambda) \longrightarrow \mathsf{D}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\Lambda).$$

順像の場合と同様に，双対化函手を用いれば shrink functor $\mathrm{R}f^!$ が定義できる

このように構成した導来函手達は標準的な性質を満たす．ここでは結合性 (定理 2.2.2) の証明に必要になる，潤滑射に関する基底変換定理のみを紹介する．

次の図式は局所有限表示である導来スタックの (無限圏 dSt_∞ における) カルテシアン図式であって，射 f が局所有限表示であるとする．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}' \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{Y}' \arrow[r, "p"] & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

すると $\mathsf{Fun}_\infty(\mathsf{D}^-_{\infty,\mathrm{c}}(\mathcal{X},\Lambda),\mathsf{D}^-_{\infty,\mathrm{c}}(\mathcal{Y}',\Lambda))$ における射 $p^*f_! \to \varphi_!\pi^*$ と $\mathsf{Fun}_\infty(\mathsf{D}^+_{\infty,\mathrm{c}}(\mathcal{X},\Lambda),\mathsf{D}^+_{\infty,\mathrm{c}}(\mathcal{Y}',,\Lambda))$ における射 $p^!f_* \to \phi_*\pi^!$ が定まる．

命題 4.3.1 ([Y, §6.6])**.** p が潤滑なら，$\mathsf{Fun}_\infty(\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\infty,\mathrm{c}}(\mathcal{X},\Lambda),\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\infty,\mathrm{c}}(\mathcal{Y}',\Lambda))$ において $p^*f_! \to \varphi_!\pi^*$ と $p^!f_* \to \phi_*\pi^!$ は同値．

4.3.2 ℓ 進係数の場合

ここまでは係数環 Λ が有限体の場合の構成可能層の導来 (無限) 圏や導来函手を説明したが，導来 Hall 代数の定式化に必要になるのは $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ の場合である．より一般に Λ が標数 $\ell > 0$ の完備離散付値環の場合，$\mathfrak{m} \subset \Lambda$ を極大イデアルとして $\Lambda = \varprojlim_n(\Lambda/\mathfrak{m}^n)$ とみなことで，導来圏や導来函手を極限として構成することができる [Y, §7]．このような構成は代数スタックの場合に Laszlo-Olsson が [LO2] で与えたもので，[Y] はその比較的安直な無限圏類似をとったものである．具体的には，環付き無限トポス (ringed ∞-topos) の極限に関する一般論を展開して [Y, §7.1]，それを導来無限圏や導来函手に適用させる．これ以上の説明は技術的になるので省略する．

4.4 導来 Hall 代数の幾何学的定式化と結合性の証明

この副節では §2.2 で概説した幾何学的定式化をより詳しく説明し, また結合性 (定理 2.2.2) の証明の概要を説明する. 技術的な詳細は [Y, §9, §10] を参照して頂きたい.

D を有限体 $k=\mathbb{F}_q$ 上の dg 圏で, [TVa07, Definition 2.4] の意味で有限型だとする. ここでは正確な定義は述べないが, ループのない有限箙の k 上の表現からなる複体の dg 圏が典型的な例である. このとき, D 上の完全 dg 加群のモジュライ空間が局所有限表示である導来スタック $\mathcal{P}(\mathsf{D})$ として実現できる, というのが事実 2.2.1 の正確な主張である. dg 加群を複体とみなし, 非自明な斉次部分が a 以上 b 以下の次数に集中する dg 加群を考えることで,

$$\mathcal{P}(\mathsf{D})=\textstyle\bigcup_{a\le b}\mathcal{P}(\mathsf{D})^{[a,b]}$$

という分解があることが分かる (正確には Tor amplitude という概念 [Y, §9.4] を用いる). また D が有限型であることから, 三角圏 $\operatorname{Ho}\mathsf{P}(D)$ の Grothendieck 群 $K_0(\operatorname{Ho}\mathsf{P}(\mathsf{D}))$ を用いて, 各 $\mathcal{P}(\mathsf{D})^{[a,b]}$ が更に

$$\mathcal{P}(\mathsf{D})^{[a,b]}=\textstyle\coprod_{\alpha\in K_0(\operatorname{Ho}\mathsf{P}(\mathsf{D}))}\mathcal{P}(\mathsf{D})^{[a,b],\alpha}$$

という分解を持つことが従う. $M\in\mathsf{P}(D)$ の $K_0(\mathsf{P}(D))$ における同値類を $\overline{M}$ と書けば, $\mathcal{P}(\mathsf{D})^{[a,b],\alpha}$ がパラメトライズするのは次数が $[a,b]$ に含まれる dg 加群 M であって $\overline{M}=\alpha$ となるものである.

同様にコファイブレーションのモジュライ空間 $\mathcal{G}(\mathsf{D})$ も分解

$$\mathcal{G}(\mathsf{D})=\textstyle\bigcup_{a\le b}\mathcal{G}(\mathsf{D})^{[a,b]},\quad \mathcal{G}(\mathsf{D})^{[a,b]}=\coprod_{\alpha,\beta\in K_0(\operatorname{Ho}\mathsf{P}(\mathsf{D}))}\mathcal{G}(\mathsf{D})^{[a,b],\alpha,\beta}$$

を持つ. ここで $\mathcal{G}_{\mathsf{D}}^{[a,b]}$ がパラメトライズするのはコファイブレーション $u:N\rightarrowtail M$ のうち M の次数が $[a,b]$ に含まれるものであり, $\mathcal{G}_{\mathsf{D}}^{[a,b],\alpha,\beta}$ については $u:N\rightarrowtail M$ であって $\alpha=\overline{N}$, $\beta=\overline{t(u)}$ なるものである.

さて §2.2 で説明した導来スタックの射を思い出そう:

$$s,c,t:\mathcal{G}(\mathsf{D})\longrightarrow\mathcal{M}(\mathsf{D}).$$

これらはコファイブレーション $u:N\rightarrowtail M$ を $s(u)=N$, $c(u)=M$, $t(u)=N\coprod^M 0$ に写すものだった. s,c,t は上記の分解を保つので, 制限することで図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(\mathsf{D})^{[a,b],\alpha,\beta} \arrow[r, "c"] \arrow[d, "p:=s\times t"'] & \mathcal{P}(\mathsf{D})^{[a,b],\alpha+\beta} \\
\mathcal{P}(\mathsf{D})^{[a,b],\alpha}\times\mathcal{P}(\mathsf{D})^{[a,b],\beta} &
\end{tikzcd}$$

が得られる. 射 $p:=s\times t$ の次元 $\dim p$ の定義は [Y, Definition 2.2.23] を参照せよ. 導来 Hall 代数の積 μ は

$$\mu_{\alpha,\beta}:\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\infty,\mathrm{c}}(\mathcal{P}(\mathsf{D})^{\alpha},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\times\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\infty,\mathrm{c}}(\mathcal{P}(\mathsf{D})^{\beta},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\longrightarrow\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\infty,\mathrm{c}}(\mathcal{P}(\mathsf{D})^{\alpha+\beta},\overline{\mathbb{Q}}_\ell),\quad M\longmapsto c_!\,p^*(M)[\dim p]$$

で与えらえる. 定理 2.2.2 は

$$\mu_{\alpha,\beta+\gamma}\circ(\mathrm{id}\times\mu_{\beta,\gamma})\simeq\mu_{\alpha+\beta,\gamma}\circ(\mu_{\alpha,\beta}\times\mathrm{id})\tag{4.4.1}$$

を主張している.

その証明の概略を説明しよう．まず (4.4.1) の左辺の函手 $\mu_{\alpha,\beta+\gamma} \circ (\mathrm{id} \times \mu_{\beta,\gamma})$ は下の図式の実線部分に対応する:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{G}^{\alpha,(\beta,\gamma)} \arrow[r, dotted, "p_2''"] \arrow[d, dotted, "p_1''"'] & \mathcal{G}^{\alpha,\beta+\gamma} \arrow[r, "p_2'"] \arrow[d, "p_1'"] & \mathcal{M}^{\alpha+\beta+\gamma} \\
\mathcal{P}^{\alpha} \times \mathcal{G}^{\beta,\gamma} \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"'] & \mathcal{P}^{\alpha} \times \mathcal{P}^{\beta+\gamma} & \\
\mathcal{P}^{\alpha} \times \mathcal{P}^{\beta} \times \mathcal{P}^{\gamma} & &
\end{tikzcd}
$$

ここで $\mathcal{P}^{\alpha} := \mathcal{P}(\mathsf{D})^{[a,b],\alpha}$ などと略記した．破線部分は

$$
\mathcal{G}^{\alpha,(\beta,\gamma)} := (\mathcal{P}^{\alpha} \times \mathcal{G}^{\beta,\gamma}) \times_{\mathcal{P}^{\alpha} \times \mathcal{P}^{\beta+\gamma}} \mathcal{G}^{\alpha,\beta+\gamma}
$$

でもって定まる．この導来スタックはコファイブレーションの組 $(N \rightarrowtail M, M \rightarrowtail L)$ であって $\overline{N} = \gamma$, $\overline{M} = \beta + \gamma$, $\overline{L} = \alpha + \beta + \gamma$ となるものをパラメトライズしている．ここで p_1'' の潤滑性から基底変換定理 (命題 4.3.1) が使えて，$\mu_{\alpha,\beta+\gamma} \circ (\mathrm{id} \times \mu_{\beta,\gamma}) \simeq (p_2' p_2'')_! (p_1 p_1'')^* [\dim(p_1 p_1'')]$ と計算できる．

同様に (4.4.1) の右辺 $\mu_{\alpha,\beta+\gamma} \circ (\mathrm{id} \times \mu_{\beta,\gamma})$ は次の図式の実線部分に対応する．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{G}^{(\alpha,\beta),\gamma} \arrow[r, dotted, "p_2''"] \arrow[d, dotted, "p_1''"'] & \mathcal{G}^{\alpha+\beta,\gamma} \arrow[r, "p_2'"] \arrow[d, "p_1'"] & \mathcal{M}^{\alpha+\beta+\gamma} \\
\mathcal{G}^{\alpha,\beta} \times \mathcal{P}^{\gamma} \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"'] & \mathcal{P}^{\alpha+\beta} \times \mathcal{P}^{\gamma} & \\
\mathcal{P}^{\alpha} \times \mathcal{P}^{\beta} \times \mathcal{P}^{\gamma} & &
\end{tikzcd}
$$

破線部分を定める

$$
\mathcal{G}^{(\alpha,\beta),\gamma} := (\mathcal{G}^{\alpha,\beta} \times \mathcal{P}^{\gamma}) \times_{\mathcal{P}^{\alpha+\beta} \times \mathcal{P}^{\gamma}} \mathcal{G}^{\alpha+\beta,\gamma}
$$

がパラメトライズするのは，コファイブレーションの組 $(R \to L \coprod^{M} 0, M \to L)$ であって $\overline{M} = \gamma$, $\overline{R} = \beta$, $\overline{L} = \alpha + \beta + \gamma$ となるものである．基底変換定理により左辺と同じ計算が成立する．このことから，結合性はモジュライスタックに関する主張

$$
\mathcal{G}^{\alpha,(\beta,\gamma)} \simeq \mathcal{G}^{(\alpha,\beta),\gamma}
$$

から従うことがわかる．このモジュライの同型は閉点上での場合に帰着して証明される．

謝辞

この研究は日本学術振興会科学研究費 (16K17570, 19K03399) の助成を受けています．またこの文書の執筆にあたり日本学術振興会二国間事業 “Elliptic algebras, vertex operators and link invariant” の助成を受けています．

参考文献

[GJ99] P. Goerss, J. F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Progress in Math. **174**, Birkhauser, 1999.

[H98] M. Hovey, *Model Categories*, Math. Surveys Monogr. **63**, Amer. Math. Soc., Providence, 1998.

[LM00] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge, **39**, Springer-Verlag, 2000.

[LO1] Y. Laszlo, M. Olsson, *The six operations for sheaves on Artin stacks I: Finite Coefficients*, Publ. Math. IHÉS, **107** (2008) 109–168.

[LO2] Y. Laszlo, M. Olsson, *The six operations for sheaves on Artin stacks II: Adic Coefficients*, Publ. Math. IHÉS, **107** (2008) 169–210.

[Lur1] J. Lurie, *Higher topos theory*, Annals of Math. Studies **170**, Princeton University Press, 2009.

[Lur2] J. Lurie, *Higher algebra*, available at his webpage https://www.math.ias.edu/~lurie/

[Lur] J. Lurie, *Derived Algebraic Geometry*, V–XIV, available at his webpage.

[Lus92] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Birkhauser, 1992.

[O16] M. Olsson, *Algebraic Spaces and Stacks*, AMS Colloq. Publ. **62**, Amer. Math. Soc., 2016.

[O07] M. Olsson, *Sheaves on Artin stacks*, J. reine angew. Math. **603** (2007), 55–112.

[R90] C. Ringel, *Hall algebras and quantum groups*, Invent. Math. **101** (1990), no. 3, 583–591.

[S06] O. Schiffmann, *Lectures on Hall algebras*, in *Geometric methods in representation theory. II*, pp. 1–141, Sémin. Congr., 24-II, Soc. Math. France, Paris, 2012; arXiv:math/0611617v2.

[S09] O. Schiffmann, *Lectures on canonical and crystal bases on Hall algebras*, in *Geometric methods in representation theory. II*, Sémin. Congr., 24-II, Soc. Math. France, Paris, 2012; arXiv:math/0910.4460v2.

[T06] B. Toën, *Derived Hall algebras*, Duke Math. J. **135** (2006), no. 3, 587–615.

[TVa07] B. Toën, M. Vaquié *Moduli of objects in dg-categories*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4^{e} série, t. **40** (2007), 387–444.

[TVe05] B. Toën, G. Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry I: Topos theory*, Adv. in Math. **193**, Issue 2 (2005), 257–372.

[TVe08] B. Toën, G. Vezzosi, *Homotopical Algebraic Geometry II: Geometric Stacks and Applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **193**, 2008.

[高橋 12] 高橋篤史, 弦理論の代数的基礎, 臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリー **89**, サイエンス社, 2012.

[Y] S. Yanagida, *Geometric derived Hall algebra*, preprint, arXiv:1912.05442.