

Hall 代数と Yang-Baxter 方程式 q, q, & q 研究集会

柳田 伸太郎

名古屋大学多元数理科学研究科

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/index-j.html>

2020 年 2 月 19 日

1. 概要

- **Ringel-Hall 代数**: 有限的 (finitary) な Abel 圏 A に対して **拡大の数え上げ** で定義される結合代数 $H(A)$ のこと.
 - ループなし圏 Q 上の表現圏 $A = \text{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q$ の場合, 代数埋め込み $U_{\sqrt{q}}(\mathfrak{b}_Q) \hookrightarrow H(\text{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q)$ がある (Ringel, 1990).
 - A が更に遺伝的なら, $H(A)$ は Hopf 内積付きの双代数の構造を持つ (Green, 1995). \rightsquigarrow **Drinfeld ダブル** $DH(A)$.
- **Bridgeland-Hall 代数**: A の二周期複体の Hall 代数 $BH(A)$.
 A が遺伝的なら, これは $DH(A)$ と一致する.

Bridgeland, *Quantum groups via Hall algebras of complexes*, Ann. Math., 2013
Y., *A note on Bridgeland's Hall algebra of 2-periodic complexes*, Math. Z., 2016.
- これは **Yang-Baxter 方程式の解が複体の圏を用いて構成** できることを意味する.

1. 概要

- この構成を二周期複体のモジュライ空間を用いて説明したい。
- Hall 代数の幾何学的定式化
 - Ringel-Hall 代数 $H(\text{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q)$ の Lusztig 構成: Q の表現のモジュライ空間上の構成可能 ℓ 進層を用いる。
Lusztig, *Introduction to Quantum Groups*, Birkhäuser, 1993.
 - Toën の導来 Hall 代数: dg 圏のモデル圏構造を用いた, \mathbb{F}_q 上の複体の Hall 代数の理論。
Toën, *Derived Hall algebras*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 2007.
 - 複体のモジュライ空間は導来スタックを用いて定義できる。
Toën, Vaquié, *Moduli of objects in dg-categories*, Ann. Éc. Norm. Sup., 2007.
 - 複体のモジュライ空間を用いた導来 Hall 代数の幾何学的定式化。
Y., *Geometric derived Hall algebra*, arXiv:1912.05442.

2. Ringel-Hall 代数と Bridgeland-Hall 代数

- 1 概要
- 2 Ringel-Hall 代数と Bridgeland-Hall 代数
 - Ringel-Hall 代数の定義
 - Bridgeland-Hall 代数
 - Drinfeld ダブルとの関係
- 3 Hall 代数の幾何学的定式化
- 4 Yang-Baxter 方程式のモジュライ解釈

2.1 Ringel-Hall 代数 — 有限性条件

\mathbb{F}_q : q 元からなる有限体.

定義

以下の条件を満たす圏 A を \mathbb{F}_q 上の**有限的** (finitary) **Abel 圏**と呼ぶ.

- \mathbb{F}_q **線形** Abel 圏.
- 本質的に小 (対象の同型類全体 $\text{Iso}(A)$ と $\text{Hom}_A(\cdot, \cdot)$ は集合).
- $\text{Ext}_A^i(\cdot, \cdot)$ は有限次元線形空間.
- **大域次元が有限** (十分大きい i に対して $\text{Ext}_A^i(\cdot, \cdot) = 0$).

A の例:

- **mod- R** : \mathbb{F}_q 上の有限次元代数 R 上の有限次元右加群のなす圏.
- **Coh(X)**: \mathbb{F}_q 上の非特異射影的代数多様体 X 上の
接続 \mathcal{O}_X 加群層のなす圏.

2.1 Ringel-Hall 代数 — 定義

- A : \mathbb{F}_q 上の有限 Abel 圏. $\nu = q^{1/2} \in \mathbb{C}$ を固定.

定理/定義 (Ringel, 1990)

- 以下で定まる単位的結合 \mathbb{C} 代数 $(H(A), *)$ を A の Hall 代数と呼ぶ.
 - $H(A) := \bigoplus_{[M] \in \text{Iso}(A)} \mathbb{C}[M]$,
 - $[M] * [N] := \nu^{\chi(M,N)} \sum_{[L] \in \text{Iso}(A)} \frac{|\text{Ext}_A^1(M,N)_L|}{|\text{Aut}_A(M)||\text{Aut}_A(N)|} [L]$,
 $\text{Ext}_A^1(M,N)_L := \{0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0 \mid A \text{ の短完全列} \}$.
 - Grothendieck 群 $K_0(A)$ の群環で
 - $\tilde{H}(A) := \mathbb{C}K_0(A) \otimes_{\mathbb{C}} H(A)$, $k_\alpha \in \mathbb{C}K_0(A)$ ($\alpha \in K_0(A)$)
 - $k_\alpha * [M] = \nu^{\chi_S(\alpha, M)} [M] * k_\alpha$
- と拡大した結合代数を A の拡大 Hall 代数と呼ぶ.
- $\chi(\cdot, \cdot) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_q} \text{Ext}_A^i(\cdot, \cdot)$, $\chi_S(M, N) := \chi(M, N) + \chi(N, M)$.

2.1 Ringel-Hall 代数 — 簾の表現圏の場合

- Q : ループなし簾.
 $\text{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q = \text{mod-}\mathbb{F}_q Q : Q$ の表現圏. これは有限的 Abel 圏.
 \rightsquigarrow 拡大 Hall 代数 $\tilde{H}(\text{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q)$ が定まる.
- $\nu = q^{1/2} \in \mathbb{C}$.
 $U_\nu(\mathfrak{g}_Q) : Q$ に付随する Kac-Moody Lie 代数 \mathfrak{g}_Q の量子群.
 $U_\nu(\mathfrak{b}_Q) \subset U_\nu(\mathfrak{g}_Q) : \text{Borel 部分代数}$.

定理 (Ringel, 1990)

次のような代数埋め込みが存在する.

$$U_\nu(\mathfrak{b}_Q) \hookrightarrow \tilde{H}(\text{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q), \quad E_i \mapsto [S_i], \quad K_i \mapsto k_{S_i}.$$

Q が ADE 簾の場合, この埋め込みは同型.

2.1 Ringel-Hall 代数 — Hopf 代数構造

定理 (Green, 1995; Xiao, 1997)

有限的 Abel 圏 A が**遺伝的** ($\text{Ext}_A^{i \geq 2}(\cdot, \cdot) = 0$) ならば,

$\tilde{H}(A)$ は 位相的**双代数**の構造を持つ.

更に A の任意の対象の部分対象が有限個なら $\tilde{H}(A)$ は **Hopf 代数**.

Green の余積と Hopf 内積:

$$\Delta([L]) := \sum_{[M],[N]} \nu^{\chi(M,N)} \frac{|\text{Ext}_A(M, N)_L|}{|\text{Aut}_A(L)|} [M] \otimes [N],$$

$$([M] * k_\alpha, [N] * k_\beta) = \frac{\delta_{M,N} \chi_S(\alpha, \beta)}{|\text{Aut}_A(M)|}.$$

定理 (Green, 1995; Xiao, 1997)

Ringel の代数埋め込み $U_\nu(\mathfrak{b}_Q) \hookrightarrow \tilde{H}(\text{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q)$ は **Hopf 代数埋め込み**.

2.1 Ringel-Hall 代数 — 曲線上の Hall 代数

- C : 有限体 \mathbb{F}_q 上の非特異射影曲線.
連接 \mathcal{O}_C 加群層のなす圏 $\text{Coh}(C)$ は有限的かつ遺伝的な Abel 圏.
特に $\tilde{H}(\text{Coh}(C))$ が定義され, 位相的双代数である.
- [Kapranov, 1997]: C が射影直線 \mathbb{P}^1 の場合,
 $\tilde{H}(\text{Coh}(\mathbb{P}^1))$ の中心拡大 $\tilde{H}'(\mathbb{P}^1)$ は \mathfrak{sl}_2 量子ループ代数の Borel 部分代数 $U_\nu(\mathcal{Lb}_+)$ を部分双代数に持つ:

$$U_\nu(\mathcal{Lb}_+) \hookrightarrow \tilde{H}'(\mathbb{P}^1).$$

- [Burban-Schiffmann, 2006 (2012)]: C が楕円曲線 E の場合,
 $\tilde{H}(\text{Coh}(E))$ の中心拡大 $\tilde{H}'(E)$ は \mathfrak{gl}_1 量子トロイダル代数 (Ding · 庵原 · 三木代数) の “Borel” 部分代数を部分双代数に持つ.

- 1 概要
- 2 Ringel-Hall 代数と Bridgeland-Hall 代数
 - Ringel-Hall 代数の定義
 - Bridgeland-Hall 代数
 - Drinfeld ダブルとの関係
- 3 Hall 代数の幾何学的定式化
 - 導来スタック
 - Hall 代数の幾何学的構成
- 4 Yang-Baxter 方程式のモジュライ解釈
 - モジュライ空間の構造
 - 普遍 R 行列と Yang-Baxter 方程式

2.2 Bridgeland-Hall 代数 — 二周期複体

A : (\mathbb{F}_q 上の) 有限的 Abel 圏で豊富な射影的対象を持つ.

$P_A \subset A$: 射影的対象のなす充満部分圏

$C_2(P_A)$: 次の形の鎖複体のなす圏

$$\begin{aligned} M_\bullet &= (\cdots \rightarrow M_{-1} \xrightarrow{d_1} M_0 \xrightarrow{d_0} M_1 \xrightarrow{d_1} M_2 \rightarrow \cdots) \quad M_i \in P_A \\ &=: \left(M_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xleftarrow{d_0} \end{array} M_0 \right). \end{aligned}$$

$C_2(P_A)$ は有限的 Abel 圏. \rightsquigarrow Hall 代数 $H(C_2(P_A))$ が定義される.

$$[M_\bullet] * [N_\bullet] := \nu^{\chi(M_0, N_0) + \chi(M_1, N_1)} \sum_{[L_\bullet] \in \text{Iso}(C_2(P_A))} g_{M_\bullet, N_\bullet}^{L_\bullet} [L_\bullet].$$

2.2 Bridgeland-Hall 代数 — 非可換局所化

目的の代数 $BH(A)$ は (非可換) 結合代数 $H(C_2(P_A))$ を非輪状複体に対応する部分集合で局所化したもの.

命題

- ① $M_\bullet \in C_2(P_A)$ が非輪状 ($:\iff H_*(M_\bullet) = 0$) なら, $M_\bullet \simeq K_{P_\bullet} \oplus K_{Q_\bullet}^*$ なる対象 $P, Q \in P_A$ が一意に存在. 但し

$$K_{P_\bullet} := \left(P \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}_P} \\ \xleftarrow{0} \end{array} P \right), \quad K_{Q_\bullet}^* := \left(Q \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xleftarrow{-\text{id}_Q} \end{array} Q \right).$$

- ② $\{[M_\bullet] \mid H_*(M_\bullet) = 0\}$ は Ore 条件を満たす.

2.2 Bridgeland-Hall 代数 — 定義

定義 (Bridgeland, 2013)

A は次の二条件を満たす圏とする.

- A は遺伝的かつ有限的な Abel 圏.
- A は十分豊富な射影的対象を持つ.

結合代数 $BH(A)$ を $H(C_2(P_A))$ の局所化で以下のように定義し、**Bridgeland-Hall 代数**と呼ぶ:

$$BH(A) := H(C_2(P_A))[[M_\bullet]^{-1} \mid H_*(M_\bullet) = 0].$$

A の例:

- $\text{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q$: ループなし箭 Q の \mathbb{F}_q 上の表現圏.
- $\text{Coh}(C)$: \mathbb{F}_q 上の非特異射影的曲線 C 上の連接 \mathcal{O}_C 加群層のなす圏.

2.2 Bridgeland-Hall 代数 — 三角分解

Bridgeland は $K_0(A)$ が良い性質を満たす A に対して $BH(A)$ の三角分解を定義し, $H(A)$ と $BH(A)$ との関係を調べた.

定理 (Bridgeland, 2013)

- ① 以下のような線型同型がある.

$$\begin{aligned} \tilde{H}(A) \otimes_{\mathbb{C}} \tilde{H}(A) &\longrightarrow BH(A), \\ [M] \otimes 1 &\mapsto E_M, \quad 1 \otimes [N] \mapsto F_N, \quad k_\alpha \otimes 1 \mapsto k_\alpha, \quad 1 \otimes k_\beta \mapsto k_\beta^*. \end{aligned}$$

更にこれは代数埋め込み $\tilde{H}(A) \hookrightarrow BH(A)$ を定める.

- ② $A = \text{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q$ なら代数埋め込み

$$U_\nu(\mathfrak{g}_Q) \hookrightarrow BH(\text{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q)_{\text{red}}$$

がある. 更に Q が ADE 筋ならこの埋め込みは同型.

- 1 概要
- 2 Ringel-Hall 代数と Bridgeland-Hall 代数
 - Ringel-Hall 代数の定義
 - Bridgeland-Hall 代数
 - Drinfeld ダブルとの関係
- 3 Hall 代数の幾何学的定式化
 - 導来スタック
 - Hall 代数の幾何学的構成
- 4 Yang-Baxter 方程式のモジュライ解釈
 - モジュライ空間の構造
 - 普遍 R 行列と Yang-Baxter 方程式

2.3 Drinfeld ダブルとの関係

- Ringel-Hall 代数 $\tilde{H}(A)$ は以下の余積 Δ と内積 (\cdot, \cdot) で Hopf 内積付きの位相的双代数になる (Green, 1995).
- Hopf 内積付きの双代数 H の **Drinfeld ダブル** $DH: H \otimes_{\mathbb{C}} H$ 上に次の様な代数構造 \circ が一意に定まる:
 - $H \rightrightarrows H \otimes_{\mathbb{C}} H: a \mapsto a \otimes 1$ 及び $a \mapsto 1 \otimes a$ は共に代数埋め込み.
 - $(a \otimes 1) \circ (1 \otimes b) = a \otimes b$
 - $\sum (a_{(2)}, b_{(1)}) a_{(1)} \otimes b_{(2)} = \sum (a_{(1)}, b_{(2)}) (1 \otimes b_{(1)}) \otimes (a_{(2)} \otimes 1)$.

定理 (Bridgeland, Y.)

A は次の三条件を満たす圏とする.

- A は遺伝的かつ有限的な Abel 圏.
- A は十分豊富な射影的对象を持つ.
- $K_0(A)$ は良い条件を満たす. ($\rightsquigarrow BH(A)$ は三角分解を持つ.)

この時 $BH(A)$ は $\tilde{H}(A)$ の Drinfeld ダブルと代数同型.

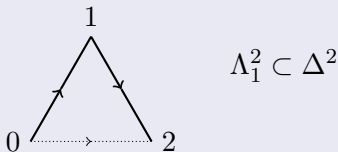
3. Hall 代数の幾何学的定式化

- 1 概要
- 2 Ringel-Hall 代数と Bridgeland-Hall 代数
- 3 Hall 代数の幾何学的定式化
 - 導来スタック
 - Hall 代数の幾何学的構成
- 4 Yang-Baxter 方程式のモジュライ解釈

3.1. 導来スタック — 無限圏

導来代数幾何学は無限圏や無限トポスを用いて定式化される。

- $\Lambda_j^n \subset \Delta^n$: n 単体と j -th horn ($0 \leq j \leq n$).
- 無限圏とは単体的集合 K であって, 任意の $n \in \mathbb{N}$ と $0 < j < n$ 及び単体写像 $f: \Lambda_j^n \rightarrow K$ に対しリフト $\bar{f}: \Delta^n \rightarrow K$ が存在するもののこと.



- 通常圏は対象を頂点, 射を辺とみなすことで無限圏と思える (ナーブ構成).
- 無限圏の定義で “ $0 \leq j \leq n$ に対してリフトが存在” としたものが Kan 複体.

3.1. 導来スタック — 導来スキーム

- k : 可換環.
- sCom : 単体的可換 k 代数の圏.
- sCom_∞ : sCom を (単体的集合の圏 Set_Δ に Kan モデル構造を入れ $\text{sCom} \subset \text{Set}_\Delta$ とみた時の) 弱同値で局所化して得られる無限圏.

定義

$\text{dAff}_\infty := (\text{sCom}_\infty)^{\text{op}}$ をアフィン導来スキームの無限圏と呼ぶ.

導来スキームの簡単な説明:

- dRgSp_∞ : **導来環付き空間**の無限圏. 対象は位相空間 X と X 上の単体的可換 k 代数層 \mathcal{O}_X の組 (X, \mathcal{O}_X) .
- dSch_∞ : **導来スキーム**の無限圏.
以下のような (X, \mathcal{O}_X) が張る dRgSp_∞ の部分無限圏.
 - truncation $(X, \pi_0(\mathcal{O}_X))$ はスキーム.
 - 各 $n \in \mathbb{N}$ について, $\pi_n(\mathcal{O}_X)$ は準連接 $\pi_0(\mathcal{O}_X)$ 加群層.

3.1. 導来スタック — 定義

$s\text{Com}_\infty$ の射 $A \rightarrow B$ が **エタール [潤滑]** : \iff

- $\pi_0(A) \rightarrow \pi_0(B)$ が可換 k 代数のエタール射 [潤滑射].
- 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\pi_0(B)$ 加群射 $\pi_n(A) \otimes_{\pi_0(A)} \pi_0(B) \rightarrow \pi_n(B)$ が同型.

エタール射によって無限圏 $d\text{Aff}_\infty$ 上のエタール位相 et が定義される.

定義

導来スタックの無限圏

$$d\text{St}_\infty := \text{Sh}_{\infty, \text{et}}(d\text{Aff}_\infty)^\wedge \subset \text{Fun}_\infty((d\text{Aff}_\infty)^{\text{op}}, \mathcal{S}_\infty)$$

\mathcal{S}_∞ : 空間 (Kan 複体) の無限圏.

3.2. Hall 代数の幾何学的構成 — 導来モジュライ空間

A: 有限的な Abel 圏, 十分豊富な射影的对象を持つ.

$C_2(P_A)$: 射影的对象からなる二周期複体の圏. 射影的モデル構造を持つ.

命題 (c.f. Toën-Vaquié, 2009)

$C_2(P_A)$ の对象のモジュライ $\mathcal{O}b$ 及びコファイブレーションのモジュライ $\mathcal{E}x$ が (局所幾何学的かつ局所有限型な) 導来スタックで構成できる.

導来スタックの射

$$s, c, t : \mathcal{E}x(C_2(P_A)) \longrightarrow \mathcal{O}b(C_2(P_A))$$

であって, コファイブレーション $u : X \hookrightarrow Y$ を

$$s(u) = X, \quad t(u) = Y, \quad c(u) = Y \coprod^X 0.$$

に写すものがある.

3.2. Hall 代数の幾何学的構成 — 導来無限圏

これから次の導来スタックの図式を得る:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E}x(\mathbf{C}_2(\mathbf{P}_A)) & \xrightarrow{t} & \mathcal{O}b(\mathbf{C}_2(\mathbf{P}_A)) & (u : X \hookrightarrow Y) \dashrightarrow Y \\
 \downarrow p:=s \times c & & \downarrow & \downarrow \\
 \mathcal{O}b(\mathbf{C}_2(\mathbf{P}_A))^{\times 2} & & & (X, Y \coprod^X 0)
 \end{array}$$

定理 (Y., arXiv:1912.05442)

局所幾何学的な導来スタック \mathcal{X} 上の構成可能 lisse-étale $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 層のなす導来無限圏 $D_c(\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ およびその間の 6 つの導来関手が定義できる.

3.2. Hall 代数の幾何学的構成

$C_2(P_A)$ のモジュライ空間の図式にこの一般論を適用すると

$$\begin{array}{ccc} D_c(\mathcal{E}x, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{c_1} & D_c(\mathcal{O}b, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ p^* \uparrow & & \\ D_c(\mathcal{O}b, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\times 2} & & \end{array}$$

これらの合成のシフトで次の関手を定める.

$$\begin{aligned} \mu &:= c_1 p^*[\dim p] : D_c(\mathcal{O}b, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\times 2} \longrightarrow D_c(\mathcal{O}b, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \\ \Delta &:= p_! c^*[\dim p] : D_c(\mathcal{O}b, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow D_c(\mathcal{O}b, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\times 2}. \end{aligned}$$

定理 (Y., arXiv:1912.05442; Hall 代数の幾何学的構成)

μ は結合的, Δ は余結合的.

3.2. Hall 代数の幾何学的構成 — 注意

注意

- $\mu : D_c(\mathcal{O}b, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\otimes 2} \rightarrow D_c(\mathcal{O}b, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ から, 層と函数の辞書

$$M_\bullet \longmapsto (\mathrm{Tr}(M_\bullet) : x \mapsto \sum_n (-1)^n \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}, H_n(M_\bullet)|_x))$$

で $\mathcal{O}b$ 上の函数空間に結合代数が定まるが, それは $BH(A)$ と同型.

- Bridgeland の代数的な定義

$$BH(A) := H(C_2(P_A)) [[M_\bullet]^{-1} \mid H_*(M_\bullet) = 0].$$

では非可換局所化が必要だったが, 幾何学的構成では不要.
(\because 非輪状な複体のなす $\mathcal{O}b(C_2(P_A))$ の部分スタックは可縮.)

2. Ringel-Hall 代数と Bridgeland-Hall 代数

- 1 概要
- 2 Ringel-Hall 代数と Bridgeland-Hall 代数
- 3 Hall 代数の幾何学的定式化
- 4 Yang-Baxter 方程式のモジュライ解釈
 - モジュライ空間の構造
 - 普遍 R 行列と Yang-Baxter 方程式

4.1. モジュライ空間の構造

- A: 遺伝的かつ有限的な Abel 圏で十分豊富な射影的対象を持つ。
 $P_A \subset A$: 射影的対象のなす充満部分圏.
- 任意の対象 $M \in A$ は極小な射影分解を (同型を除いて) 唯一持つ:

$$0 \longrightarrow P_M \xrightarrow{f_M} Q_M \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad (P_M, Q_M \in P_A).$$

M の射影分解 $0 \rightarrow P \xrightarrow{f} Q \rightarrow M \rightarrow 0$ が極小: $\iff P = \bigoplus_i P_i, Q = \bigoplus_j Q_j$ と直和分解して $f = (f_{ij} : P_i \rightarrow Q_j)$ と行列表示した時, どの f_{ij} も同型でないこと.

- $C_2(P_A)$: 射影的対象からなる二周期複体の圏.
 $M \in A$ から $E_{M\bullet}, F_{M\bullet} \in C_2(P_A)$ が定まる:

$$E_{M\bullet} := \left(P_M \begin{array}{c} \xrightarrow{f_M} \\ \xleftarrow{0} \end{array} Q_M \right), \quad F_{M\bullet} := \left(Q_M \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xleftarrow{-f_M} \end{array} P_M \right).$$

4.1. モジュライ空間の構造 — stable envelope

- $\mathcal{F}x \subset \mathcal{O}b(\mathbf{C}_2(\mathbf{P}_A))$: 次の形の二周期複体のモジュライ空間.

$$S_{\bullet}^{M,N} = \left(P_M \oplus Q_N \begin{array}{c} \xrightarrow{\begin{bmatrix} f_M & * \\ * & * \end{bmatrix}} \\ \xleftarrow{\begin{bmatrix} * & * \\ * & -f_N \end{bmatrix}} \end{array} Q_M \oplus P_N \right) \quad (M, N \in A).$$

- $\lim^0 : \mathcal{O}b(\mathbf{C}_2(\mathbf{P}_A)) \longrightarrow \mathcal{F}x$, $M_{\bullet} \longmapsto E_{H_0(M_{\bullet})} \oplus F_{H_1(M_{\bullet})}$.
- $\mathcal{L} \subset \mathcal{O}b(\mathbf{C}_2(\mathbf{P}_A)) \times \mathcal{F}x$ と \mathcal{L} を次で定義:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^c := \{(L_{\bullet}, S_{\bullet}^{M,N}) \mid \lim^0(L_{\bullet}) = S_{\bullet}^{M,N}\}^c & \hookrightarrow & \mathcal{O}b(\mathbf{C}_2(\mathbf{P}_A)) \times \mathcal{F}x \\ \downarrow & & \downarrow p_1 \\ \mathcal{L}^c & \longrightarrow & \mathcal{O}b(\mathbf{C}_2(\mathbf{P}_A)) \end{array}$$

4.1. モジュライ空間の構造 — stable envelope の対応物

- この時点で得られる図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}\mathcal{E} & \xrightarrow{p_2} & \mathcal{F}x \\ p_1 \downarrow & & \\ \mathcal{Z} & & \end{array}$$

から $\text{stab} := p_{1!}p_2^* : D_c(\mathcal{F}x, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow D_c(\mathcal{Z}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ と定義.

- 以上の構成で \lim^0 の代わりに $\lim^1 : M_\bullet \mapsto E_{H_1(M_\bullet)} \oplus F_{H_0(M_\bullet)}$ を用いて図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}\mathcal{E}' & \xrightarrow{p_2} & \mathcal{F}x \\ p_1 \downarrow & & \\ \mathcal{Z}' & & \end{array}$$

と $\text{unstab} : D_c(\mathcal{F}x, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow D_c(\mathcal{Z}', \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を定義.

4.2. 普遍 R 行列と Yang-Baxter 方程式

- $K_0(A)$ が良い性質を持つと仮定.
 $\rightsquigarrow BH(A)$ の三角分解から次の図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc}
 & & \xrightarrow{\text{stab}} D_c(\mathcal{L}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
 & \nearrow \sim & \downarrow \sim \text{三角分解} \\
 D_c(\mathcal{O}b(C_2(A)), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\times 2} & \xrightarrow{\sim} D_c(\mathcal{F}x, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & D_c(\mathcal{O}b(C_2(A)), \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
 & \searrow \sim & \uparrow \sim \text{三角分解} \\
 & & \xrightarrow{\text{unstab}} D_c(\mathcal{L}', \overline{\mathbb{Q}}_\ell)
 \end{array}$$

- “普遍 R 行列” を次で定義する.

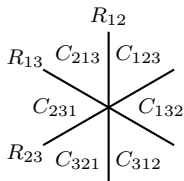
$$R := (\text{unstab})^{-1} \circ \text{stab} :$$

$$D_c(\mathcal{O}b(C_2(A)), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\times 2} \longrightarrow D_c(\mathcal{O}b(C_2(A)), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\times 2}.$$

4.2. 普遍 R 行列と Yang-Baxter 方程式

“普遍 R 行列”が Yang-Baxter 方程式を満たすこと:

- 2 階テンソルの場合の $Ob(C_2(A))^2 \supset \mathcal{F}x$ や \mathcal{L} を 3 階テンソルに拡張.
 $\rightsquigarrow \mathcal{L}_C$, C は A_2 ルート系のワイル部屋に対応.
- Yang-Baxter 方程式



$$\begin{aligned} R_{23}R_{13}R_{12} &= \text{stab}_{C_{321}}^{-1} \circ \text{stab}_{C_{123}} \\ &= R_{12}R_{13}R_{23} \end{aligned}$$

以上です.