幾何学的導来 Hall 代数

柳田伸太郎 *

概要

Toën は [T06] において Ringel-Hall 代数の一般化である**導来 Hall 代数**を導入した．Ringel-Hall 代数が Abel 圏に対して定義されるのに対し, 導来 Hall 代数は dg 圏に対して定義される．

Ringel-Hall 代数には Lusztig による**幾何学的定式化** [Lus92] が存在する．箙の表現圏に対する Ringel-Hall 代数の場合, この定式化は表現のモジュライ空間上の構成可能層の導来圏が用いられる．

この論説では**導来 Hall 代数の幾何学的定式化**を試みる．そのために, 複体のモジュライ空間を実現する**導来スタック**を説明し, また導来スタック上の構成可能層の導来圏を導入する．

1 Ringel-Hall 代数と導来 Hall 代数

1.1 Ringel-Hall 代数

Ringel-Hall 代数の定義の復習から話を始めよう．詳しくは, 例えば [S06, Chap. 1] を参照せよ．

A を有限大域次元かつ $\mathbb{F}_q$ 線形である (本質的に小な) Abel 圏とする．$\mathrm{Iso}(\mathsf{A})$ を A の対象の同型類のなす集合とし, 対象 M の同型類を $[M] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})$ と書く．また有限台を持つ関数 $\mathrm{Iso}(\mathsf{A}) \to \mathbb{Q}$ のなす線形空間を $\mathbb{Q}_c(\mathsf{A})$ と書く．$[M] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})$ の特性関数 $1_{[M]}$ は $\mathbb{Q}_c(\mathsf{A})$ の基底をなす．

定理 (Ringel)**.** 以下の演算 $*$ によって単位元つき $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathrm{Hall}(\mathsf{A}) := \big(\mathbb{Q}_c(\mathsf{A}), *, 1_{[0]}\big)$ が定まる．これを Abel 圏 A の **Ringel-Hall 代数**と呼ぶ．

$$1_{[M]} * 1_{[N]} := \sum_{[R] \in \mathrm{Iso}(\mathsf{A})} g^R_{M,N} 1_{[R]}, \quad g^R_{M,N} := a_M^{-1} a_N^{-1} e^R_{M,N},$$
$$a_M := |\mathrm{Aut}(M)|, \quad e^R_{M,N} := |\{0 \to N \to R \to M \to 0 \mid \mathsf{A} \text{ の短完全列 }\}|$$

上の定義のように構造定数 $g^R_{M,N}$ は拡大の数え上げから定まるが, 次のように部分対象の数え上げともみなせる:

$$g^R_{M,N} = \big|\mathcal{G}^R_{M,N}\big|, \quad \mathcal{G}^R_{M,N} := \{N' \subset R \mid N' \simeq N,\ R/N \simeq M\}.$$

導来 Hall 代数では Abel 圏ではなく dg 圏を考える．dg 圏には拡大という概念は存在しないので, その数え上げはできない．しかし部分対象のホモトピー論的類似である**コファイブレーション**はある．そこでコファイブレーションの数え上げで Hall 代数を定義する, というのが Toën のアイデアである．

* 名古屋大学多元数理科学研究科，yanagida@math.nagoya-u.ac.jp

1.2 dg 圏に関する記号の準備

導来 Hall 代数の説明の前に dg 圏に関していくつか記号を準備したい．その為に dg 圏, モデル圏及び単体的ホモトピー論に関する基本的な用語を用いる．詳しくはそれぞれ [高橋], [H98], [GJ99] を参照せよ．

可換環 k 上 **dg 圏** (differential graded algebra) D とは, 圏であってその射の集合 $\mathsf{D}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(X,Y)$ が k 加群の複体の構造をもち, また射の合成写像 $\mathsf{D}(Y,Z) \otimes_k \mathsf{D}(X,Y) \to \mathsf{D}(X,Z)$ が複体の射であるもののことであった．

可換環 k に対し, k 加群の複体のなす圏を $\mathsf{C}(k)$ と書く．圏の **enrichment** の用語を用いると, dg 圏とは $\mathsf{C}(k)$-enrich された圏のことである．

D を可換環 k 上の dg 圏とする．D^{op} 上の dg 加群とは $\mathsf{C}(k)$-enriched functor $\mathsf{D}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{C}(k)$ のことである．

定義. dg 圏 D に対し, D^{op} 上の dg 加群のなす dg 圏を $\mathsf{Mod}(\mathsf{D})$ と書く．

次にモデル圏に関する記号を用意しておく．

圏 C に弱同値 (weak equivalence), コファイブレーション (cofibration), ファイブレーション (fibration) の三つの射のクラスであって然るべき性質を満たすものが指定されているとき, それを**モデル圏**と呼んだ．この三つのクラスはそのうち二つを定めれば残り一つは一意に定まる．そこで以下はモデル構造 (モデル圏の構造) を定めるのに射の二つのクラスだけ説明する．

モデル圏 C に対して弱同値のクラスで局所化して得られる圏を C の**ホモトピー圏**と呼び $\mathrm{Ho}\,\mathsf{C}$ と書く．

以下 k 加群の複体の圏 $\mathsf{C}(k)$ には次で定まるモデル構造を入れてモデル圏とみなす．

- ファイブレーションは複体の全射とする．
- 弱同値は複体の擬同型とする．

すると dg 圏 D について, dg 加群の dg 圏 $\mathsf{Mod}(\mathsf{D})$ には $\mathsf{C}(k)$ のモデル構造から自然にモデル構造が定まる．今後はこのモデル構造でもって $\mathsf{Mod}(\mathsf{D})$ をモデル圏とみなす．

定義. 上記の $\mathsf{Mod}(\mathsf{D})$ のモデル構造を射影的モデル構造と呼ぶ．

次に単体的ホモトピー論から幾つか用語を引用しておく．

$n \in \mathbb{N}$ に対し n 元からなる線形順序集合を $[n] := \{0 \le 1 \le \cdots \le n\}$ と書く．これらを対象とし広義単調増加写像を射とする圏を $\boldsymbol{\Delta}$ と書く．圏 C の**単体的対象** (simplicial object) とは函手 $\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{C}$ のことである．特に C が集合の圏 Set の場合, 函手 $S : \boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ を**単体的集合** (simplicial set) と呼ぶ．函手圏

$$\mathsf{sSet} := \mathsf{Fun}(\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}).$$

の射を**単体的写像** (simplicial map) と呼ぶ．また $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\Delta^n \in \mathsf{sSet}$ が $[k] \mapsto \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{\Delta}}([k],[n])$ で定まる．これを n **単体** (n-simplex) と呼んだ．

コンパクト生成 Hausdorff 位相空間の圏を $\mathcal{CG}$ と書く．すると, **幾何学的実現** (geometric realization) $|-| : \mathsf{sSet} \to \mathcal{CG}$ と特異複体を作る函手 $\mathrm{Sing} : \mathcal{CG} \to \mathsf{sSet}$ が定まる．今後 sSet は次で定まる Kan モデル構造を入れてモデル圏とみなす．

- ファイブレーションは Kan ファイブレーション [GJ99, Chap. 1] とする．
- 弱同値は幾何学的実現のホモトピー同値とする．

さらに $\mathcal{CG}$ にはあるモデル構造が存在し,

$$|-| : \mathsf{sSet} \rightleftarrows \mathcal{CG} : \mathrm{Sing}$$

は **Quillen 随伴** (Quillen adjunction) である．特に圏同値 $\mathrm{Ho}\,\mathsf{sSet} \simeq \mathrm{Ho}\,\mathcal{CG}$ がある.

定義. Kan モデル構造に関する sSet のホモトピー圏 $\mathcal{H} := \mathrm{Ho}\,\mathsf{sSet}$ を**空間のホモトピー圏**と呼ぶ.

1.3 導来 Hall 代数

前副節 §1.2 の用語を用いて Toën の導来 Hall 代数 [T06] を説明する.

D を可換環 k 上の dg 圏とする．dg 加群の dg 圏 Mod(D) は $\mathsf{C}(k)$-enrich されているので, **ナーブ構成** (nerve construction) $\mathrm{N}(-) : \mathsf{C}(k) \to \mathsf{sSet}$ を用いて, $X, Y \in \mathsf{Mod}(\mathsf{D})$ に対し単体 $\mathrm{Map}_{\mathsf{Mod}(\mathsf{D})}(X,Y)$ を次で定義することができる.

$$\mathrm{Map}_{\mathsf{Mod}(\mathsf{D})}(X,Y) := \mathrm{N}(\mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}(\mathsf{D})}(X,Y)) \in \mathsf{sSet}$$

定義 1.3.1. dg 加群 $X \in \mathsf{Mod}(\mathsf{D})$ は以下の条件を満たすとき**完全** (perfect) であるという: 任意の Mod(D) における filtered system $\{Y_i\}_{i\in I}$ に対し, 次の自然な射は同型である.

$$\varinjlim_{i\in I} \mathrm{Map}_{\mathsf{Mod}(\mathsf{D})}(X, Y_i) \longrightarrow \mathrm{Map}_{\mathsf{Mod}(\mathsf{D})}(X, \varinjlim_{i\in I} Y_i).$$

$\mathsf{P}(\mathsf{D}) \subset \mathsf{Mod}(\mathsf{D})$ をコファイブラントかつ完全な対象と弱同値からなる部分 dg 圏とする.

次に “コファイブレーション $X \hookrightarrow Y$ のなす圏” G(D) を導入する．まず函手圏 $\mathsf{G}'(\mathsf{D}) := \mathsf{Fun}(\Delta^1, \mathsf{Mod}(\mathsf{D}))$ を考える．但し $I = \Delta^1$ は 1 単体．この圏には Mod(D) のモデル構造から自然にモデル構造が定まる.

定義 1.3.2. $\mathsf{G}(\mathsf{D}) \subset \mathsf{G}'(\mathsf{D})$ を上述のモデル構造についてコファイブラントかつ完全な対象のなす部分 dg 圏とする.

G(D) の対象 $u : X \to Y$ に対し

$$s(u) := X, \quad c(u) := Y, \quad t(u) := Y \coprod^{X} 0,$$

とすることで, 以下のような dg 圏の図式が得られる.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{G}(\mathsf{D}) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "s\times t"'] & \mathsf{P}(\mathsf{D}) \\ \mathsf{P}(\mathsf{D}) \times \mathsf{P}(\mathsf{D}) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X \hookrightarrow Y) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & Y \\ (X, \text{“}Y/X\text{”}) & \end{tikzcd} \tag{1.3.1}$$

dg 圏から単体的集合を作る **dg ナーブ構成** [Lur2, Chap. 1] を N_{dg} と書く．また単体的集合のホモトピー型を取る函手を $[-] : \mathsf{sSet} \to \mathcal{H}$ と書く.

定義 1.3.3. $X^{(0)}(\mathsf{D}), X^{(1)}(\mathsf{D}) \in \mathcal{H}$ を以下で定義する.

$$X^{(0)}(\mathsf{D}) := [\mathrm{N}_{\mathrm{dg}}(\mathsf{P}(\mathsf{D}))], \quad X^{(1)}(\mathsf{D}) := [\mathrm{N}_{\mathrm{dg}}(\mathsf{G}(\mathsf{D}))],$$

すると (1.3.1) からホモトピー型の図式が得られる.

$$\begin{tikzcd} X^{(1)}(\mathsf{D}) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "s\times t"'] & X^{0}(\mathsf{D}) \\ X^{(0)}(\mathsf{D}) \times X^{(0)}(\mathsf{D}) & \end{tikzcd}$$

この図式は以下の性質を持つ.

命題 1.3.4. $k = \mathbb{F}_q$ とする. dg 圏 D が局所有限ならば c は固有かつ $X^{(i)}(\mathsf{D}) \in \mathcal{H}$ は局所有限.

ここで局所有限性は次のように定義される.

定義 1.3.5. (1) dg 圏 D が**局所有限**であるとは, 任意の $x, y \in \mathsf{D}$ に対し複体 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(x, y)$ のホモロジーが有界かつ有限次元であることをいう.

(2) ホモトピー型 $X \in \mathcal{H}$ が**局所有限**であるとは, 任意の $x \in X$ についてホモトピー群 $\pi_i(X, x)$ が有限群であり, またある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $i > n$ ならば $\pi_i(X, x)$ が自明になることをいう.

以下 $\mathcal{H}^{\mathrm{lf}} \subset \mathcal{H}$ を局所有限な対象のなす部分圏とする.

§1.1 の冒頭と同様に, $X \in \mathcal{H}$ に対し有限台を持つ関数 $X \to \mathbb{Q}$ のなす線形空間を $\mathbb{Q}_c(X)$ と書く. また $\mathcal{H}^{\mathrm{lf}}$ の射 $f : X \to Y$ に対し線形写像 $f^* : \mathbb{Q}_c(Y) \to \mathbb{Q}_c(X)$ を

$$f^*(\alpha)(x) := \alpha(f(x)) \quad (\alpha \in \mathbb{Q}_c(Y),\ x \in \pi_0(X))$$

で定義する. また線形写像 $f_! : \mathbb{Q}_c(X) \to \mathbb{Q}_c(Y)$ を次のように定義する.

$$f_!(\alpha)(y) := \sum_{x \in \pi_0(X),\, f(x) = y} \alpha(x) \cdot \prod_{i>0} \Big(|\pi_i(X, x)|^{(-1)^i}\ |\pi_i(Y, y)|^{(-1)^{i+1}} \Big).$$

命題 1.3.4 と定義 1.3.5 よりこれらが well-defined であることに注意する.

定理 (Toën [T06])**.** D を局所有限な $\mathbb{F}_q$ 上の dg 圏とする. このとき

$$\mathrm{Hall}(\mathsf{D}) := \mathbb{Q}_c(X^{(0)}(\mathsf{D})), \quad \mu := c_! \circ (s \times t)^* : \mathrm{Hall}(\mathsf{D}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{Hall}(\mathsf{D}) \longrightarrow \mathrm{Hall}(\mathsf{D}).$$

で単位元付き結合 $\mathbb{Q}$ 代数が定まる. この代数 Hall(D) を D の**導来 Hall 代数**と呼ぶ.

2 幾何学的導来 Hall 代数の構成の概要

Lusztig による Ringel-Hall 代数の幾何学的構成 [Lus92, S09] の導来 Hall 代数類似を考えたい. Lusztig の構成には箙の表現のモジュライ空間上の構成可能層が用いられたことを思い出すと, まず dg 加群のモジュライ空間を考える必要がある.

定理 (Toën-Vaquié [TVa07])**.** D を局所有限な $\mathbb{F}_q$ 上の dg 圏とする. D^{op} 上の完全 dg 加群のモジュライ空間 $\mathcal{P}(\mathsf{D})$ が幾何学的かつ局所有限型な**導来スタック**で構成できる.

導来スタックについては §3 で解説する. $\mathcal{P}(\mathsf{D})$ は §1.3 の $\mathsf{P}(\mathsf{D})$ に対応している. 同様に D^{op} 上の完全 dg 加群のコファイブレーション $X \to Y$ のモジュライ空間も導来スタックで構成できるが, それを $\mathcal{G}(\mathsf{D})$ と表す.

§1.3 と同様の議論で, 導来スタックの射

$$s, c, t : \mathcal{G}(\mathsf{D}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathsf{D})$$

であって $u : X \to Y$ を

$$s(u) = X, \quad c(u) = Y, \quad t(u) = Y \coprod^{X} 0$$

に写すものが存在する. s, t は潤滑 (§3.4 を参照せよ) であり, c は固有である.

これから導来スタックの図式

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(\mathsf{D}) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{P}(\mathsf{D}) \\ \mathcal{P}(\mathsf{D}) \times \mathcal{P}(\mathsf{D}) & \end{tikzcd} \tag{2.0.1}$$

ができる. ここで $p := s \times t$ は潤滑であり, c は固有である.

次に $\Lambda := \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ とし, ℓ と q は互いに素だと仮定する. すると幾何学的な導来スタック $\mathcal{X}$ に対し, **構成可能 lisse-étale Λ 層の有界導来圏** $\mathsf{D}^b_{\mathrm{c}}(\mathcal{X}, \Lambda)$ を考えることができる (§4.2). そしてそれらの間の導来函手の理論をつくることができる (§4.3).

これらの一般論を図式 (2.0.1) に適用すると

$$\begin{tikzcd} \mathsf{D}^b_{\mathrm{c}}(\mathcal{G}(\mathsf{D}), \Lambda) \arrow[r, "c_!"] & \mathsf{D}^b_{\mathrm{c}}(\mathcal{P}(\mathsf{D}), \Lambda) \\ \mathsf{D}^b_{\mathrm{c}}(\mathcal{P}(\mathsf{D}) \times \mathcal{P}(\mathsf{D}), \Lambda) \arrow[u, "p^*"] & \end{tikzcd}$$

そこで演算 μ を次のように定義する.

$$\mu : \mathsf{D}^b_{\mathrm{c}}(\mathcal{P}(\mathsf{D}) \times \mathcal{P}(\mathsf{D}), \Lambda) \longrightarrow \mathsf{D}^b_{\mathrm{c}}(\mathcal{P}(\mathsf{D}), \Lambda), \quad M \longmapsto c_! p^*(M)[\dim p]$$

定理 2.0.1. μ は結合的である.

これが導来 Hall 代数の幾何学的定式化である.

3 完全 dg 加群のモジュライ空間

3.1 無限圏と Grothendieck 位相

導来スタックは導来代数幾何学で定式化されるものだが, その説明には無限圏 (∞-category) および無限トポス (∞-topos) の理論 [Lur1] が必要になる. ここでは必要最低限の説明だけ行う.

§1.2 と同様に n 単体を Δ^n と書く. また $0 \le j \le n$ に対し $\Lambda^n_j \subset \Delta^n$ を Δ^n の j-th horn とする.

定義 3.1.1. **無限圏**とは弱 Kan 複体のことである. つまり, 単体的集合 K であって, 任意の $n \in \mathbb{N}$ と $0 < i < n$ に対し, 任意の単体的写像 $f_0 : \Lambda^n_i \to K$ が $f : \Delta^n \to K$ に拡張できるもののことをいう.

単体的集合 $K : \mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ に対して $K([0])$ の元を K の頂点, $K([1])$ の元を K の辺と呼ぶ. 無限圏は通常の圏と次のように対応する.

- 無限圏 K の頂点を K の対象と呼び, 辺を K の射と呼ぶ.
- ナーブ構成によって圏 C から無限圏 $\mathrm{N}(\mathsf{C})$ が得られる. その対象や射は C の対象や射と一致する.

以下では X が無限圏 K の対象であることを $X \in K$ と書く. 無限圏 K の対象 K について, その **over-∞-category** [Lur1, §1.2.9] を $K_{/X}$ と書く.

無限圏の間の函手の定義は非常に簡単である.

定義. 無限圏函手 $K \to L$ とは単体的写像のことである. それらが定める無限圏を $\mathsf{Fun}_\infty(K, L)$ と書く.

次に**空間の無限圏** (∞-category of spaces) について簡単に説明する. 単体的集合の圏 sSet において Kan 複体 (無限圏の定義 3.1.1 において $0 \le i \le n$ としたもの) のなす充満部分圏を Kan と書く.

sSet の対象 X, Y に対して, $\mathrm{Map}_{\mathsf{sSet}}(X, Y) \in \mathsf{sSet}$ であって $\pi_0 \mathrm{Map}_{\mathsf{sSet}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{sSet}}(X, Y)$ となるものが定まる. このように sSet-enrich された圏を**単体的圏** (simplicial category) と呼ぶ. Kan も $\mathrm{Map}_{\mathsf{Kan}}(-,-) \subset \mathrm{Map}_{\mathsf{sSet}}(-,-)$ によって単体的圏とみなせる.

一方, 単体的圏から複体を作る**単体的ナーブ構成** (simplicial nerve construction) $\mathrm{N}_{\mathrm{sp}}(-)$ がある [Lur1, Definition 1.1.5.6]. これを単体的圏 Kan に用いて

定義 3.1.2. $\mathcal{S}_\infty := \mathrm{N}_{\mathrm{sp}}(\mathsf{Kan})$ は無限圏であり, **空間の無限圏**と呼ばれる.

次の性質がその名前の由来である.

定理 3.1.3 (Quillen)**.** $\mathrm{Ho}\,\mathcal{S}_\infty \simeq \mathcal{H}$.

最後に無限圏の Grothendieck 位相について説明する. 詳しくは [Lur1, §6.2.2] や [TVe05] を参照せよ.

定義 3.1.4. C を無限圏とする.

(1) C の**篩** (sieve) とは充満部分無限圏 $\mathsf{C}^{(0)} \subset \mathsf{C}$ であって, 任意の $Y \in \mathsf{C}^{(0)}$ と C の射 $f : X \to Y$ について $X \in \mathsf{C}^{(0)}$ となるもののことをいう.

(2) $X \in \mathsf{C}$ **の篩**とは over-∞-category $\mathsf{C}_{/X}$ の篩のことである.

無限圏の函手 $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ と篩 $\mathsf{D}^{(0)} \subset \mathsf{D}$ に対し $F^{-1}\mathsf{D}^{(0)} := \mathsf{D}^{(0)} \times_{\mathsf{D}} \mathsf{C} \subset \mathsf{C}$ は C の篩である. また C の射 $f : X \to Y$ に対し over-∞-category の間の函手 $f_* : \mathsf{C}_{/X} \to \mathsf{C}_{/Y}$ が自然に定まる. そこで Y の篩 $\mathsf{C}^{(0)}_{/Y}$ に対し X の篩を $f^*\mathsf{C}^{(0)}_{/Y} := (f_*)^{-1}\mathsf{C}^{(0)}_{/Y}$ と定めることができる.

定義 3.1.5. C を無限圏とする. C 上の **Grothendieck 位相** τ とは各 $X \in \mathsf{C}$ の篩の族 $\mathrm{Cov}(X)$ が定まっていて以下の三条件が満たされることをいう.

(a) 任意の $X \in \mathsf{C}$ に対し $\mathsf{C}_{/X}$ は $\mathrm{Cov}(X)$ に含まれる.

(b) 任意の C の射 $f : X \to Y$ と任意の $\mathsf{C}^{(0)}_{/Y} \in \mathrm{Cov}(Y)$ に対し $f^*\mathsf{C}^{(0)}_{/Y} \in \mathrm{Cov}(X)$.

(c) $Y \in \mathsf{C}$ および $\mathsf{C}^{(0)}_{/Y} \in \mathrm{Cov}(Y)$ について, もし $\mathsf{C}^{(1)}_{/Y}$ が Y の篩であって任意の $\mathsf{C}^{(0)}_{/Y}$ の対象 $f : X \to Y$ に対して $f^*\mathsf{C}^{(1)}_{/Y} \in \mathrm{Cov}(X)$ となるならば, $\mathsf{C}^{(1)}_{/Y} \in \mathrm{Cov}(Y)$ である.

$\mathrm{Cov}(X)$ を X **の被覆篩** (covering sieves) の族とよぶ. τ を強調したいときは $\mathrm{Cov}_\tau(X)$ と書く.

C が通常の圏のナーブならば, 上記の Grothendieck 位相は通常の圏の Grothendieck 位相と本質的に同じ概念である. 後の定義 3.3.2 で無限圏上の Grothendieck 位相の例を紹介する.

3.2 導来代数幾何

次に導来代数幾何について簡単に説明する．非常に大雑把に言うと，スキーム論における可換環を単体的可換環におきかえることで導来版の理論が得られる．

可換環 k を固定する．可換 k 代数の圏を Com と書く．Com の単体的対象，つまり函手 $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Com}$ を**単体的可換 k 代数**と呼ぶ．それらの圏 $\mathsf{sCom} := \mathsf{Fun}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Com})$ から，$\mathsf{sCom} \subset \mathsf{sSet}$ とみなして弱同値のクラスで局所化することで無限圏 sCom_∞ が得られる．

単体的可換 k 代数 $A \in \mathsf{sCom}_\infty$ は単体的集合なのでホモトピー群 $\pi_n(A)$ が定まる．このとき $\pi_0(A)$ は可換 k 代数であり，各 $\pi_n(A)$ は $\pi_0(A)$ 加群である．

k 上のアフィンスキームの圏が $(\mathsf{Com})^{\mathrm{op}}$ と同値であることを思い出して，次の定義を考える．

定義 3.2.1. $\mathsf{dAff}_\infty := (\mathsf{sCom}_\infty)^{\mathrm{op}}$ を**アフィン導来スキーム**の無限圏と呼ぶ．

但し op は無限圏としての反対 (opposite) [**?**, Chap. 1] を意味する．$A \in \mathsf{sCom}_\infty$ に対応するアフィン導来スキームを U とすると，U に対しアフィンスキーム $\operatorname{Spec} \pi_0(A)$ を対応させることができる．これを $\pi_0(U) := \operatorname{Spec} \pi_0(A)$ と書く．

以降の議論では直接は用いないが，**導来スキーム**について簡単に説明しよう．位相空間 X 上の sCom_∞ に係数を持つ層のなす無限圏を $\mathsf{sCom}_\infty(X)$ と書く．位相空間 X と $\mathcal{O}_X \in \mathsf{sCom}_\infty(X)$ の組を導来環付き空間とよび，それらのなす無限圏を dRgSp_∞ と書く．

$\mathsf{dSch}_\infty \subset \mathsf{dRgSp}_\infty$ を次の二条件を満たす対象 $(X, \mathcal{O}_X)$ の張る部分無限圏とする．dSch_∞ の対象を導来スキームと呼ぶ．

- $(X, \pi_0(\mathcal{O}_X))$ はスキーム．
- 各 $n \in \mathbb{N}$ について $\pi_n(\mathcal{O}_X)$ は $\pi_0(\mathcal{O}_X)$ 加群の準連接層．

3.3 導来スタック

次に導来スタックについて説明する．導来スタックは dAff_∞ に Grothendieck 位相 τ を入れて得られる**無限トポス** $(\mathsf{dAff}_\infty, \tau)$ 上の層として定義できる．

定義 3.3.1. τ を dAff_∞ 上の Grothendieck 位相とする．**導来スタック**の無限圏 dSt_∞ を次のように定義する

$$\mathsf{dSt}_\infty := \mathsf{Sh}_{\infty,\tau}(\mathsf{dAff}_\infty)^\wedge \subset \mathsf{Fun}_\infty((\mathsf{dAff}_\infty)^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}_\infty).$$

ここで $\mathsf{Sh}_{\infty,\tau}(\mathsf{dAff}_\infty)^\wedge$ は Grothendieck 位相 τ に関する層のうち **hypercomplete** [Lur1, TVe05] であるもののなす無限圏である．また $\mathcal{S}_\infty$ は空間の無限圏 (定義 3.1.2) である．

dAff_∞ 上の Grothendieck 位相の例としてエタール位相を紹介する:

定義 3.3.2. sCom_∞ の射 $A \to B$ が**エタール**であるとは次の二条件が満たされることをいう．

- 誘導される可換 k 代数の射 $\pi_0(A) \to \pi_0(B)$ がエタールである．
- 任意の i について，誘導される $\pi_0(B)$ 加群の射 $\pi_i(A) \otimes_{\pi_0(A)} \pi_0(B) \to \pi_i(B)$ が同型である．

同様に sCom_∞ の潤滑な射 $A \to B$ も定義できる．

エタール射から dAff_∞ の Grothendieck 位相が定まるが，それをエタール位相と呼ぶ．

3.4 幾何学的導来スタック

通常の代数幾何学においては, スタックのうち幾何学的に良くふるまうものを代数スタック (algebraic stack) と呼んで区別する ([LM00, O16] を参照).

定義 3.3.1 の導来スタックは通常の代数幾何学におけるスタックに対応するものである. 通常の意味の意味での代数スタックに対応するのが**幾何学的導来スタック** [TVe08] である. その定義を説明しよう.

$n \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ に対し n **幾何学的導来スタック** (n-geometric derived stack) が帰納的に定義される. また同時に n **アトラス** (n-atlas), n **表現可能射** (n-representable morphism) 及び n **潤滑射** (n-smooth morphsm) も定義される.

定義.

- $n = -1$ とする.
  1. (-1)-**幾何学的導来スタック**とはアフィン導来スキーム (定義 3.2.1) のこととする.
  2. 導来スタックの射 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が (-1) **表現可能**であるとは, 任意のアフィン導来スキーム U と任意の導来スタックの射 $U \to \mathcal{Y}$ に対し, $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U$ がアフィン導来スキームになることをいう.
  3. 導来スタックの射 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が (-1) **潤滑**であるとは, (-1) 表現可能かつ, 任意のアフィン導来スキーム U と任意の導来スタックの射 $U \to \mathcal{Y}$ に対し, $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U \to U$ がアフィンスキームの潤滑射 (定義 3.3.2) であることをいう.
  4. 導来スタック $\mathcal{X}$ の (-1) アトラスとは $\{\mathcal{X}\}$ のことである.
- $n \in \mathbb{N}$ とする.
  1. $\mathcal{X}$ を導来スタックとする. **$\mathcal{X}$ の n アトラス**とは導来スタックの射の族 $\{U_i \to \mathcal{X}\}_{i \in I}$ であって以下の条件を満たすもののこととする.
     - 各 U_i はアフィン導来スキーム.
     - 各 $U_i \to \mathcal{X}$ は $(n-1)$ 潤滑射.
     - $\coprod_{i \in I} U_i \to \mathcal{X}$ は全射.
  2. 導来スタック $\mathcal{X}$ は以下の条件を満たすとき n **幾何学的**であるという.
     - 対角射 $\mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ は $(n-1)$ 表現可能.
     - $\mathcal{X}$ の n アトラスが存在する.
  3. 導来スタックの射 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ は次の条件を満たすとき n **表現可能**であるという: 任意のアフィン導来スキーム U と任意の導来スタックの射 $U \to \mathcal{Y}$ に対し, 導来スタック $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U$ は n 幾何学的.
  4. 導来スタックの射 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ は次の条件を満たすとき n **潤滑**であるという: 任意のアフィン導来スキーム U と任意の導来スタックの射 $U \to \mathcal{Y}$ に対し, ある $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U$ の n アトラス $\{U_i\}_{i \in I}$ が存在して, 各 $i \in I$ に対し合成 $U_i \to \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U \to U$ がアフィン導来スキームの潤滑射である.

幾何学的導来スタックの性質を一つだけ紹介する.

定理 (Toën-Vezzossi [TVe08])**.** 代数スタック $\mathcal{X}$ に対し導来スタック $j(\mathcal{X})$ を函手的に対応させることができる. 更に $j(\mathcal{X})$ は 1 幾何学的である.

4 導来スタック上の構成可能層

4.1 構造可能 lisse-étale 層

代数スタック上の構造可能層の定義には lisse-étale トポスが用いられた [LM00, O16]. その導来類似として **lisse-étale 無限トポス**を導入する.

導来スタック $\mathcal{X}$ に対し, $\mathsf{dAff}_\infty/\mathcal{X} \subset (\mathsf{dSt}_\infty)_{/\mathcal{X}}$ をアフィン導来スキームのなす充満部分無限圏とする.

定義. $n \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ とし, また $\mathcal{X}$ を n 幾何学的導来スタックとする. $\mathcal{X}$ 上の **lisse-étale 無限トポス**

$$\mathsf{Lis\text{-}Et}^n_\infty(\mathcal{X}) = (\mathsf{Lis}^n_\infty(\mathcal{X}), \text{lis-et})$$

を次で定める.

- $\mathsf{Lis}^n_\infty(\mathcal{X}) \subset \mathsf{dAff}_\infty/\mathcal{X}$ を n 潤滑な射 $u : U \to \mathcal{X}$ のなす充満部分無限圏とする.
- $(U, u) \in \mathsf{Lis}^n_\infty(\mathcal{X})$ の被覆篩 $\mathrm{Cov}_{\text{lis-et}}(U, u)$ は $\{(U_i, u_i) \to (U, u)\}_{i \in I} \subset \mathsf{Lis}^n_\infty(\mathcal{X})$ であって $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ がエタール被覆になるものとする.

また $\mathsf{Sh}_{\infty,\text{lis-et}}(\mathsf{Lis}_\infty(\mathcal{X})) \subset \mathsf{Fun}_\infty(\mathsf{Lis}_\infty(\mathcal{X}), \mathcal{S}_\infty)$ の対象を $\mathcal{X}$ 上の **lisse-étale 層**と呼ぶ.

次に通常のスキーム上の**構成可能層**を思い出しておこう: スキーム X 上の層 $\mathcal{F}$ が構成可能であるとは, 任意のアフィン開部分スキーム $U \subset X$ について, $\mathcal{F}|_{U_i}$ が有限集合に値を持つ局所定数層になるような構成可能な局所閉部分スキーム U_i への有限分割 $U = \cup_i U_i$ が存在することをいう.

構成可能層の概念の導来スタック版を導入しよう. 定義 3.2.1 の直後の説明と同様に, アフィン導来スキーム U に付随するアフィンスキームを $\pi_0(U)$ と書く.

定義 4.1.1. $\mathcal{X}$ を幾何学的導来スタックとする. $\mathcal{X}$ 上の lisse-étale 層 $\mathcal{F}$ が**構成可能**であるとは, cartesian [LM00, Chap. 12] であり, かつ任意の $U \in \mathsf{Lis\text{-}Et}_\infty(\mathcal{X})$ について制限 $\pi_0(\mathcal{F})|_{\pi_0(U)}$ が $\pi_0(U)$ 上の (通常の意味での) 構成可能層となることをいう.

可換環 Λ に対し単体的 Λ 加群の無限圏を $\Lambda\text{-}\mathsf{sMod}_\infty$ と書く.

定義. $\mathcal{X}$ を幾何学的導来スタック, Λ を可換環とする. $\mathcal{X}$ 上の**単体的 Λ 加群の構成可能 lisse-étale 層**を $\mathsf{Mod}_\infty(\mathcal{X}_{\text{lis-et}}, \Lambda) := \mathsf{Sh}_{\infty,\text{lis-et}}(\mathsf{Lis}_\infty(\mathcal{X}), \Lambda\text{-}\mathsf{sMod}_\infty)$ の対象であって定義 4.1.1 の意味で構成可能なものとする. それらのなす無限圏を $\mathsf{Mod}^{\mathrm{c}}_\infty(\mathcal{X}_{\text{lis-et}}, \Lambda)$ と書く.

4.2 構成可能層の導来圏

前節で導入した構成可能 lisse-étale 層の無限圏 $\mathsf{Mod}^{\mathrm{c}}_\infty(\mathcal{X}_{\text{lis-et}}, \Lambda)$ は次のような性質を満たす.

命題. $\mathcal{X}$ を幾何学的導来スタックとし, Λ を可換環とする. 無限圏 $\mathsf{Mod}^{\mathrm{c}}_\infty(\mathcal{X}_{\text{lis-et}}, \Lambda)$ は Lurie [Lur2] の意味で安定である. 特にホモトピー圏 $\mathrm{Ho}\,\mathsf{Mod}^{\mathrm{c}}_\infty(\mathcal{X}_{\text{lis-et}}, \Lambda)$ は三角圏の構造を持つ.

安定無限圏の説明の前に導来圏の記号を導入しておく.

定義. $\mathcal{X}$ を幾何学的導来スタックとし, Λ を可換環とする. $\mathcal{X}$ 上の**構成可能 lisse-étale 層の導来圏**を

$$\mathsf{D}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\Lambda) := \mathrm{Ho}\,\mathsf{Mod}^{\mathrm{c}}_{\infty}(\mathcal{X}_{\text{lis-et}},\Lambda)$$

で定義する. また左有界 [右有界, 有界] 導来圏を $\mathsf{D}^{*}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\Lambda) \subset \mathsf{D}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X},\Lambda)$ $(* \in \{+,-,b\})$ と書く.

この副節の残りの部分で安定無限圏の説明をする.

定義. 無限圏 C は以下の三条件を満たすとき**安定**であるという.

- 零対象 $0 \in \mathsf{C}$ をもつ.
- 任意の射はファイバーとコファイバーを持つ.
- C の三角が引き戻し正方図式 (pullback square) であることと押し出し正方図式 (pushout square) であることは同値.

但し零対象をもつ無限圏 C の**三角** (triangle) とは次の形の正方図式のことである.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

安定無限圏 C に対して懸垂函手 (suspension functor) $\Sigma : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ とループ函手 (loop functor) $\Omega : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ が定義できる [Lur2, §1.1.2]. それを以下で説明しよう.

$\mathsf{M}^{\Sigma} \subset \mathsf{Fun}_{\infty}(\Delta^1 \times \Delta^1, \mathsf{C})$ を次の形の押し出し正方図式のはる充満部分無限圏とする:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

ここで 0 と $0'$ は C の零対象. C の射はコファイバーを持つので, X で評価することで trivial fibration $i : \mathsf{M}^{\Sigma} \to \mathsf{C}$ が得られる. 同様に Y での評価から trivial fibration $f : \mathsf{M}^{\Sigma} \to \mathsf{C}$ が得られる. $s : \mathsf{C} \to \mathsf{M}^{\Sigma}$ を i の切断とする.

定義. $\Sigma := f \circ s : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ を**懸垂函手**と呼ぶ. 双対的に**ループ函手** $\Omega : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ も定まる.

$n \in \mathbb{N}$ に対し, 懸垂函手の n 回合成 Σ^n を $X \mapsto X[n]$ と書く. またループ函手の n 回合成 Ω^n を $X \mapsto X[-n]$ と書く. れらはホモトピー圏 $\mathrm{Ho}\,\mathsf{C}$ の上の函手 $[n] : \mathrm{Ho}\,\mathsf{C} \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{C}$ を定める.

最後に安定無限圏 C のホモトピー圏 $\mathrm{Ho}\,\mathsf{C}$ の持つ三角圏の構造を説明する.

$\mathrm{Ho}\,\mathsf{C}$ の図式

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

が特三角であるとは, C の図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \arrow[d] \\ 0' \arrow[r] & Z \arrow[r, "\widetilde{h}"'] & W \end{tikzcd}$$

であって以下の四性質を満たすものが存在することをいう:

- $0, 0' \in \mathsf{C}$ は零対象.
- 二つの正方図式はともに C の押し出し図式.

- C の射 $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ は $\mathrm{Ho}\,\mathsf{C}$ の射 f, g を代表する.
- h は $\widetilde{h}$ のホモトピー類と外周りの長方形から定まる同値 $W \simeq X[1]$ との合成と一致する.

定理 4.2.1 ([Lur2, Theorem 1.1.2.14])**.** 安定無限圏 C に対し, $[1] = \Sigma : \mathrm{Ho}\,\mathsf{C} \to \mathrm{Ho}\,\mathsf{C}$ と特三角たちによって $\mathrm{Ho}\,\mathsf{C}$ に三角圏の構造が定まる.

以上で述べた安定無限圏の理論は Abel 圏から構成される導来圏の理論と整合的である. つまり, 可換環 k 上の加群圏 $\mathsf{Mod}(k)$ から導来圏 $D\,\mathsf{Mod}(k)$ が構成できるが, 一方で k 加群の無限圏 $\mathsf{Mod}_\infty(k)$ は安定で, 定理 4.2.1 の $\mathrm{Ho}\,\mathsf{Mod}_\infty(k)$ と三角圏として同値である.

また安定無限圏には t 構造の理論もあるが, ここでは説明しない. [Lur2, §1.2] を参照せよ.

4.3 導来函手の構成

前副節 §4.2 で導入した構成可能層の導来圏には Grothendieck の六つの導来函手の類似が定義できる. つまり, n 幾何学的導来スタックの有限型かつ n 潤滑射 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ に対して

$$\mathrm{R}f_* : \mathsf{D}^+_{\mathrm{c}}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathsf{D}^+_{\mathrm{c}}(\mathcal{Y}), \quad \mathrm{R}f_! : \mathsf{D}^-_{\mathrm{c}}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathsf{D}^-_{\mathrm{c}}(\mathcal{Y}),$$
$$\mathrm{L}f^* : \mathsf{D}_{\mathrm{c}}(\mathcal{Y}) \longrightarrow \mathsf{D}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X}), \quad \mathrm{R}f^! : \mathsf{D}_{\mathrm{c}}(\mathcal{Y}) \longrightarrow \mathsf{D}_{\mathrm{c}}(\mathcal{X})$$

および RHom と $\otimes^{\mathrm{L}}$ が定義できる. ここでは $\mathrm{R}f_*$ と $\mathrm{R}f^*$ を説明しよう.

$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ を n 幾何学的導来スタックの n 潤滑射とする.

$$f_* : \mathsf{Mod}^{\mathrm{c}}_\infty(\mathcal{X}_{\text{lis-et}}, \Lambda) \longrightarrow \mathsf{Mod}^{\mathrm{c}}_\infty(\mathcal{Y}_{\text{lis-et}}, \Lambda), \quad (f_*\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(U \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X})$$

と定義する. f が有限型ならば導来押し出し函手 $\mathrm{R}f_* : \mathsf{D}^+_{\mathrm{c}}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathsf{D}^+_{\mathrm{c}}(\mathcal{Y})$ が定まる.

引き戻し函手の構成はより複雑である. まず n 幾何学的導来スタック $\mathcal{X}$ の n アトラス $\{U_i\}_{i \in I}$ を一つとる $X_0 = \coprod_{i \in I} U_i$ とし, 自然に定まる導来スタックの射 $X_0 \to \mathcal{X}$ を用いて各 $k \in \mathbb{N}$ に対し $X_k = X_0 \times_{\mathcal{X}} \cdots \times_{\mathcal{X}} X_0$ (k 重ファイバー積) とし, $X_\bullet$ が定まる. n 潤滑全射 $X_n \to \mathcal{X}$ によって $e_X : X_\bullet \longrightarrow \mathcal{X}$ も定まる. これを $\mathcal{X}$ の**コスケルトン** (coskelton) と呼ぶ .

次に $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ を n 幾何学的導来スタックの射とする. $e_X : X_\bullet \to \mathcal{X}$ と $e_Y : Y_\bullet \to \mathcal{Y}$ をコスケルトンとすると, $f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ が自然に定まる. これから次の可換図式が定まる.

$$\begin{CD} X_\bullet @>{f_\bullet}>> Y_\bullet \\ @V{e_X}VV @VV{e_Y}V \\ \mathcal{X} @>>{f}> \mathcal{Y} \end{CD}$$

sCom_∞ のエタール射 (定義 3.3.2) から定まる dSt_∞ のエタール位相を et と書く. すると $f_\bullet$ から無限トポスの射

$$f_{\bullet,\mathrm{et}} : X_{\bullet,\mathrm{et}} \longrightarrow Y_{\bullet,\mathrm{et}}$$

が定まる. 従って次のように函手 $f^*_\bullet$ が定まる.

$$f^*_\bullet : \mathsf{Mod}^{\mathrm{cart}}_\infty(Y_{\bullet,\mathrm{et}}, \Lambda) \longrightarrow \mathsf{Mod}^{\mathrm{cart}}_\infty(X_{\bullet,\mathrm{et}}, \Lambda)$$

ここで cart は cartesian [LM00, Chap. 12] な層のなす充満部分無限圏を意味する. 一方, 降下の議論によって以下の同値が存在する.

$$r_{\mathcal{X}} : \mathsf{Mod}^{\mathrm{cart}}_\infty(\mathcal{X}_{\text{lis-et}}, \Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Mod}_\infty(X_{\bullet,\mathrm{et}}, \Lambda), \quad r_{\mathcal{Y}} : \mathsf{Mod}^{\mathrm{cart}}_\infty(\mathcal{Y}_{\text{lis-et}}, \Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Mod}_\infty(Y_{\bullet,\mathrm{et}}, \Lambda).$$

以上の準備の下, 函手 f^* を次のように定義する.

$$f^* := r_{\mathcal{X}}^{-1} \circ f_\bullet^* \circ r_{\mathcal{Y}} \mathsf{Mod}_\infty^{\mathrm{cart}}(\mathcal{Y}_{\text{lis-et}}, \Lambda) \longrightarrow \mathsf{Mod}_\infty^{\mathrm{cart}}(\mathcal{X}_{\text{lis-et}}, \Lambda)$$

f が有限型であれば, これから構成可能層の函手

$$f^* : \mathsf{Mod}_\infty^{\mathrm{c},+}(\mathcal{Y}_{\text{lis-et}}, \Lambda) \longrightarrow \mathsf{Mod}_\infty^{\mathrm{c},+}(\mathcal{X}_{\text{lis-et}}, \Lambda)$$

が定まる. そして導来函手

$$\mathrm{R}f^* : \mathsf{D}_{\mathrm{cstr}}(\mathcal{Y}, \Lambda) \longrightarrow \mathsf{D}_{\mathrm{cstr}}(\mathcal{X}, \Lambda).$$

が定まる.

謝辞

この研究は日本学術振興会科学研究費 (16K17570, 19K03399) の助成を受けています. またこの文書の執筆にあたり日本学術振興会二国間事業 “Elliptic algebras, vertex operators and link invariant” の助成を受けています.

参考文献

[GJ99] P. Goerss, J. F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Progress in Math. **174**, Birkhauser, 1999.

[H98] M. Hovey, *Model Categories*, Math. Surveys Monogr. **63**, Amer. Math. Soc., Providence, 1998.

[LM00] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge, **39**, Springer-Verlag, 2000.

[Lur1] J. Lurie, *Higher topos theory*, Annals of Math. Studies **170**, Princeton University Press, 2009.

[Lur2] J. Lurie, *Higher algebra*, September 2017, available at his webpage `http://www.math.harvard.edu/~lurie/`

[Lus92] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Birkhauser, 1992.

[O16] M. Olsson, *Algebraic Spaces and Stacks*, AMS Colloq. Publ. **62**, Amer. Math. Soc., 2016.

[S06] O. Schiffmann, *Lectures on Hall algebras*, in *Geometric methods in representation theory. II*, pp. 1–141, Sémin. Congr., 24-II, Soc. Math. France, Paris, 2012; arXiv:math/0611617v2.

[S09] O. Schiffmann, *Lectures on canonical and crystal bases on Hall algebras*, in *Geometric methods in representation theory. II*, Sémin. Congr., 24-II, Soc. Math. France, Paris, 2012; arXiv:math/0910.4460v2.

[T06] B. Toën, *Derived Hall algebras*, Duke Math. J. **135** (2006), no. 3, 587–615.

[TVa07] B. Toën, M. Vaquié *Moduli of objects in dg-categories*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4$^{\mathrm{e}}$ série, t. **40** (2007), 387–444.

[TVe05] B. Toën, G. Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry I: Topos theory*, Adv. in Math. **193**, Issue 2 (2005), 257–372.

[TVe08] B. Toën, G. Vezzosi, *Homotopical Algebraic Geometry II: Geometric Stacks and Applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **193**, 2008.

[高橋] 高橋篤史, 弦理論の代数的基礎, 臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリー **89**, サイエンス社, 2012.