数学アゴラ　「二項係数で遊ぶ」

2019 年 8 月 7 日

柳田伸太郎 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

概要

この講義では高校数学の数学 A で習う二項係数の復習から始めて、二項定理、数え上げ、その q 類似を紹介します。

1　二項係数と二項定理

n 個の (区別できる) ものから k 個のものを選ぶ方法の数を考えましょう。日本の中学・高校数学ではこの数を ${}_n\mathrm{C}_k$ と書きますが、この講義では世界標準に合わせて、

$$\binom{n}{k}$$

と表して**二項係数**と呼びます。$\binom{n}{k}$ は次のように階乗を使って計算できます。

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.1}$$

練習 1.1. 等式 (1.1) の証明を考えてください。

等式 (1.1) をもう少し精密に考えましょう。正の整数 n の階乗 $n!$ は次のような積のことでした。

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$$

注意 1.1. ここで記号 := は「左辺を右辺で定義する」の意味です。

(計算欄)

k は n 以下の正の整数だったので、等式 (1.1) の右辺は以下のように計算できます。

$$\begin{aligned}\frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\dots\cdot 1}\cdot\frac{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\dots\cdot 1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\dots\cdot 1}\\ &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\dots\cdot 1}.\end{aligned}$$

ところで整数 k は $k=0$ の場合も考えるのが自然です。この場合は、0 の階乗を

$$0! := 1$$

と定義しておけば

$$\frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = 1$$

となって、「n 個のものから 0 個のものを選ぶ方法は 1 通り」と考えれば等式 (1.1) が成立します。

$0! = 1$ と約束することで、等式 (1.1) は $n=0$ の場合も意味を持ちます。そこでこの講義では、式 (1.1) を二項係数 $\binom{n}{k}$ の定義として扱います。改めて述べると

定義 1.2 (二項係数). n は非負整数、 k は $0 \le k \le n$ を満たす整数とする。二項係数 $\binom{n}{k}$ を次のように定義する。

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

また $k<0$ もしくは $k>n$ となる整数 k に対しては、$\binom{n}{k}$ を次で定義する。

$$\binom{n}{k} := 0.$$

ここで記号 $:=$ は注意 1.1 と同様に、左辺を右辺で定義する、の意味です。

さて、定義 1.2 では $\binom{n}{k}$ は有理数 (分数) として表示されていますが、実際は、「n 個のものから k 個を選ぶ方法の数」という意味からして、整数です。そこで定義 1.2 から直接、$\binom{n}{k}$ が整数であることを証明してみましょう。

(計算欄)

二項係数 $\binom{n}{k}$ が整数であることの証明の方法は色々ありますが、例えば $\binom{n}{k}$ の満たす**漸化式**を使えば証明できます。

定理 1.3 (**Pascal(パスカル) の三角形**)**.** 全ての非負整数 n と全ての整数 k に対して次の等式が成立する。

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

この漸化式は **Pascal の三角形**として以下のように図で説明することができます。

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&\binom{0}{0}&&&& \\ &&&\binom{1}{0}&&\binom{1}{1}&&& \\ &&\binom{2}{0}&&\binom{2}{1}&&\binom{2}{2}&& \\ &\binom{3}{0}&&\binom{3}{1}&&\binom{3}{2}&&\binom{3}{3}& \\ \binom{4}{0}&&\binom{4}{1}&&\binom{4}{2}&&\binom{4}{3}&&\binom{4}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \end{array}$$

定理 1.3 を認めれば二項係数 $\binom{n}{k}$ がいつも整数になることは明らかでしょう。

練習 1.2 (数学的帰納法を知っている人のための問題)**.** 定理 1.3 と数学的帰納法を用いて、二項係数 $\binom{n}{k}$ が整数になることを証明せよ。

定理 1.3 はどのように示せばよいでしょうか？これもまた色々な証明がありますが、ここでは定義 1.2 から直接示してみます。

定理 **1.3** *の証明*. 右辺を変形していくと

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k+1)!}\left(k + (n-k+1)\right) = \frac{n!}{k!(n-k+1)!}(n+1) \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

となって確かに左辺と一致します。 □

(計算欄)

一般に (有限) 数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ が与えられたとき、文字 x の多項式

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

を (x を変数とする) **母関数**と呼びます。二項係数 $\binom{n}{k}$ の場合、とりあえず n は固定して、数列

$$\binom{n}{0},\ \binom{n}{1},\ \ldots,\ \binom{n}{n}$$

の母関数、つまり次の多項式を考えます。

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k := \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^n.$$

$\binom{n}{k}$ の母関数は次のような性質を満たします。

定理 1.4 (二項定理). 任意の非負整数 n と文字 x に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

練習 1.3. 定理 1.4 から次の等式を示せ。但し x と y は文字とする。

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n. \tag{1.2}$$

上の練習問題の等式 (1.2) から、$\binom{n}{k}$ は<u>二項</u>x, y の和のべき乗の展開<u>係数</u>だと分かります。これが二項係数という名前の由来です。また定理 1.4 ないし等式 (1.2) を**二項定理**と呼びます。

(計算欄)

この節の最後として二項定理 (定理 1.4) を**数学的帰納法**を用いて証明します。

定理 1.4 の証明. まず $n=0$ の場合、示すべき等式は $\binom{0}{0}x^0 = 1$ ですが, これは $\binom{0}{0} = 1$ から従います。

次にある非負整数 n に対して $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+x)^n$ が成立すると仮定します。この仮定のもとで $n+1$ の場合の等式 $\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = (1+x)^{n+1}$ を証明すれば、帰納法により任意の正の整数 n に対して定理 1.4 が証明できたことになります。

まず明らかに成立する多項式の等式

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \tag{1.3}$$

を考えます。右辺に帰納法の仮定 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+x)^n$ を使って x について展開すると

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\Big)(1+x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1} \overset{(*1)}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k \\
&= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^k + \binom{n}{n}x^{n+1} \\
&= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n}\Big(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\Big)x^k + \binom{n}{n}x^{n+1} \\
&\overset{(*2)}{=} \sum_{k=0}^{n+1}\Big(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\Big)x^k.
\end{aligned}$$

ここで既に示した Pascal の三角形の漸化式 (定理 1.3) より

$$\sum_{k=0}^{n+1}\Big(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\Big)x^k = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k.$$

従って (1.3) は

$$(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k$$

となって、$n+1$ の場合の等式が証明できました。 □

練習 1.4. 上記の等号 $(*1)$ と $(*2)$ を確認せよ。

(計算欄)

2　q 二項係数

正の整数

$$1,\ 2 = 1+1,\ 3 = 1+1+1,\ \ldots,\ n = \overbrace{1+\cdots+1}^{n},\ \ldots$$

の代わりに、文字 q に対して以下のような多項式を考えましょう。

$$[1]_q := 1,\ [2]_q := 1+q,\ [3]_q := 1+q+q^2,\ \ldots,\ [n]_q := 1+q+\cdots+q^{n-1},\ \ldots.$$

これらは $q=1$ を代入すると元の整数に戻ります: $[n]_1 = n$.

このように、$q=1$ と代入すれば元々与えられている概念に戻るもののことを q **類似**と呼びます。特に $[n]_q$ のことを q **整数**と呼びます。この節の目標は二項係数の q 類似、即ち q **二項係数**を導入することです。

二項係数が $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ であったことを思い出して、まず階乗 $n!$ の q 類似を考えましょう。

$$[n]_q! := [n]_q[n-1]_q\cdots[1]_q,$$

$[n]_1 = n$ でしたから $[n]_1! = n!$ となることに注意して下さい。また $q=1$ の場合と同様に、$n=0$ の場合は $[0]_q! := 1$ と約束します。

定義 2.1 (q **二項係数**)**.** n を任意の非負整数とする。$0 \le k \le n$ を満たす任意の整数 k に対し

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}$$

と定義する。また $k<0$ もしくは $k>n$ となる整数 k に対しては、

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := 0$$

と定義する。$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ を q **二項係数**と呼ぶ。

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_1 = \binom{n}{k}$ となることに注意して下さい。

(計算欄)

練習 2.1. $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_q = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$ をとなることを計算して確認せよ。

この練習問題のように、一般には $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q \neq [\binom{n}{k}]_q$ となることに注意しましょう。

二項係数には「n 個のものから k 個を選ぶ場合の数」という意味がありました。以下では「0 と 1 を計 n 個並べてできる数列のうち、0 の個数が k 個のもの」の数と思うことにしましょう。例えば $\binom{4}{2} = 6$ は 6 つの数列

$$0011,\ 0101,\ 0110,\ 1001,\ 1010,\ 1100$$

に対応しています。q 二項係数にも同じような組み合わせ論的な意味はあるでしょうか？

答えは次のような「重み付き」の場合の数です。

定義 2.2. 0 と 1 を並べてできる数列 s に対し、0 と 1 の組であって 0 より前に 1 があるものの数を s の**転倒数**と呼び $i(s)$ と書く。

例えば上の 6 つの数列に対しては転倒数は次のようになります。

$$i(0011) = 0,\ i(0101) = 1,\ i(0110) = 2,\ i(1001) = 2,\ i(1010) = 3,\ i(1100) = 4.$$

定理 2.3. 非負整数 n と $0 \leq k \leq n$ なる整数 k に対し

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q = \sum_s q^{i(s)}.$$

但し和の s は、0 と 1 を計 n 個並べてできる数列のうち 0 の個数が k 個のものを走る。

この定理の証明は、この後で紹介する漸化式を使って証明できます。詳細は持ち帰り問題 2 にします。

(計算欄)

次に Pascal の三角形の q 類似を考えましょう。$q=1$ の場合と同様に q 二項係数を並べると

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&& \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}_q &&&& \\ &&& \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_q && \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}_q &&& \\ && \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}_q && \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}_q && \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}_q && \\ & \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}_q && \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}_q && \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_q && \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}_q & \\ \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}_q && \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}_q && \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_q && \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}_q && \begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}_q \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&& 1 &&&& \\ &&& 1 && 1 &&& \\ && 1 && 1+q && 1 && \\ & 1 && 1+q+q^2 && 1+q+q^2 && 1 & \\ 1 && 1+q+q^2+q^3 && (1+q+q^2)(1+q^2) && 1+q+q^2+q^3 && 1 \end{array}$$

$q=1$ の場合は漸化式 $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$ が成立しました。この漸化式の q 類似を考えましょう。

(計算欄)

正しい漸化式は二つあります。

定理 2.4 (Pascal の三角形の q 類似). 任意の非負整数 n と任意の整数 k に対して

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q &= \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \\ &= q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q .\end{aligned}$$

証明は $q = 1$ の場合と殆ど同じです。二つ目の漸化式のみ示します。

定理 2.4 の後半の証明. 右辺から変形していくと

$$\begin{aligned}&q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \\ &= q^{n-k+1} \frac{[n]_q!}{[k-1]_q![n-k+1]_q!} + \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!} \\ &= \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k+1]_q!} \left(q^{n-k+1}[k]_q + [n-k+1]_q \right) \\ &= \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k+1]_q!} \left(q^{n-k+1}(1+q+\cdots+q^{k-1}) + (1+q+\cdots+q^{n-k}) \right) \\ &= \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k+1]_q!}(1+q+\cdots+q^n) = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k+1]_q!}[n+1]_q \\ &= \frac{[n+1]_q!}{[k]_q![n+1-k]_q!} = \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q\end{aligned}$$

となって左辺と一致します。 □

練習 2.2. 定理 2.4 の一つ目の等号を証明せよ。

(計算欄)

3　多項式版 q 二項定理

二項定理 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ (定理 1.4) の q 類似を考えましょう。そのためにまず左辺の $(1+x)^n$ の q 類似を探します。

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2, \quad (1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$$

の 2 や 3 の代わりに $1+q$ や $1+q+q^2$ が現れるはずだと考えて、

$$(1+x)(1+qx), \quad (1+x)(1+qx)(1+qx^2)$$

を展開してみると

$$\begin{aligned}
&(1+x)(1+qx) = 1+(1+q)x+qx^2, \\
&(1+x)(1+qx)(1+q^2x) = 1+(1+q+q^2)x+(q+q^2+q^3)x^2+q^3x^2.
\end{aligned}$$

ここで $q=1$ とすれば確かに $(1+x)^2$ や $(1+x)^3$ の展開式に戻ります。

練習 3.1. $(1+x)(1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)$ を展開して $q=1$ を代入することで、$(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$ が復元されることを確認せよ。

そこで左辺 $(1+x)^n$ の q 類似として

$$(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\cdots(1+q^{n-1}x)$$

を考えましょう。以下では簡単のため、文字 q と y に対して

$$(y;q)_n := (1-y)(1-qy)\cdots(1-q^{n-1}y)$$

という記号を用意して、

$$(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\cdots(1+q^{n-1}x) = (-x;q)_n$$

と書くことにします。$n=0$ の場合は $(y;q)_0 := 1$ と約束します.

(計算欄)

次に右辺 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ の q 類似ですが、単に $\binom{n}{k}$ を $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ にするのではなく、

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}}x^k$$

という和を考えます。こちらもやはり $q=1$ の場合は $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ になります。

二項定理の q 類似は次のような等式です。

定理 3.1 (**多項式版 q 二項定理**)**.** 任意の非負整数 n と文字 x, q について

$$(-x;q)_n = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}}x^k.$$

練習 3.2. $n=1,2,3$ の場合に定理 3.1 が成立することを確かめよ。

次の頁で定理 3.1 を証明します。方針は $q=1$ の場合と同様に、漸化式 (定理 2.4) を使って帰納法で示します。

(計算欄)

定理 2.4 の証明. $n=0$ の場合は $(-x;q)_0 = 1 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}_q q^0 x^0$ より確かに成立します。

ある非負整数 n について定理 3.1 が成り立つと仮定します。明らかに成立する等式

$$(-x;q)_{n+1} = (-x;q)_n(1+xq^n)$$

の右辺に仮定 $(-x;q)_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} x^k$ と漸化式 $\begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix}_q = q^{n-k+1}\begin{bmatrix}n\\k-1\end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q$ (定理 2.4) を用いると

$$\begin{aligned}
(-x;q)_n(1+xq^n) &= \Big(\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} x^k\Big)(1+xq^n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} x^k + \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}+n} x^{k+1} \\
&\overset{(*1)}{=} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \begin{bmatrix}n\\k-1\end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}-(k-1)+n} x^k \\
&= \begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}_q q^0 x^0 + \sum_{k=1}^{n}\Big(\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix}n\\k-1\end{bmatrix}_q q^{n-k+1}\Big) q^{\binom{k}{2}} x^k + \begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix}_q q^{\binom{n}{2}+n} x^{n+1} \\
&= \begin{bmatrix}n+1\\0\end{bmatrix}_q q^0 x^0 + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} x^k + \begin{bmatrix}n+1\\n+1\end{bmatrix}_q q^{\binom{n+1}{2}} x^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} x^k
\end{aligned}$$

となって、結局

$$(-x;q)_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} x^k,$$

つまり $n+1$ の場合の定理が成り立ちます。従って数学的帰納法により、任意の非負整数 n について定理が証明されました。 □

練習 3.3. 上記の証明の等号 $(*1)$ を確認せよ。

(計算欄)

4 級数版 q 二項定理

二項定理の q 類似 (定理 3.1) は「有限積 = 有限和」という公式でした。そのため「多項式版」の q 二項定理と呼びました。実は「無限積 = 無限和」にしたものもあるので、それを紹介します。

まず多項式版 q 二項定理で $w := -x$ と文字を置き換えて

$$(w;q)_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} (-w)^k \tag{4.1}$$

と書き直します。この等式の右辺について

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} (-w)^k &= \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(q;q)_k} q^{\binom{k}{2}} (-w)^k \\
&\overset{(*1)}{=} \frac{(1-q^{-n})(1-q^{-(n-1)})\cdots(1-q^{-(n-k+1)})}{(q;q)_k} (-1)^k q^{(2n-k+1)k/2} q^{\binom{k}{2}} (-w)^k \\
&\overset{(*2)}{=} \frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_k} (q^n w)^k.
\end{aligned}$$

よって等式 (4.1) は

$$(w;q)_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_k} (q^n w)^k$$

と書き直せます。更に $z := q^n w$ と文字を置き換えて次の等式を得ます。

$$(q^{-n}z;q)_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_k} z^k.$$

更に $k > n$ なら $(q^{-n};q)_k = 0$ であることに注意して、右辺を無限和の形に書きなおしましょう。

定理 4.1 (多項式版 q 二項定理の言いかえ)**.** 任意の非負整数 n および文字 q, z について

$$(q^{-n}z;q)_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_k} z^k.$$

練習 4.1. 上の等号 $(*1)$ と $(*2)$ を確認せよ。

(計算欄)

言い換えた等号の両辺に q^{-n} が現われていることに注意しましょう。ここで両辺の q^{-n} を新しい文字 a に置き換えてみます。右辺は単に (無限和の意味を考える必要はありますが)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_k} z^k \xrightarrow{\text{置き換え}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} z^k$$

となります。一方左辺は n 個の積になので、書き換えには工夫が必要です。

そこで

$$(z;q)_\infty := (1-z)(1-qz)(1-q^2z)\cdots$$

という**無限積**の記号を用意します。すると左辺の $(q^{-n}z;q)_n$ は

$$(q^{-n}z;q)_n = \frac{(q^{-n}z;q)_\infty}{(z;q)_\infty}$$

と書き直せます。すると q^{-n} を a に置き換えることができて、

$$\frac{(q^{-n}z;q)_\infty}{(z;q)_\infty} \xrightarrow{\text{置き換え}} \frac{(a;q)_\infty}{(z;q)_\infty}$$

以上の推測で次のような等式が予想できます。

$$\frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} z^k.$$

この予想は $(a, z, q$ に適切な条件を課すと) 実際に成立して、**級数版 q 二項定理**と呼ばれています。

(計算欄)

講義ノートは以上です。

持ち帰り問題

問題 1 (2018 年度 名古屋大学入試問題 理系 3 問目). p を素数、a と b を整数とする。

(0) 任意の整数 k に対し $\binom{p}{k}$ が p で割り切れることを示せ。

(1) $(a+b)^p - a^p - b^p$ が p で割り切れることを示せ。

(2) $(a+2)^p - a^p$ は偶数であることを示せ。

(3) $(a+2)^p - a^p$ を $2p$ で割ったときの余りを求めよ。

問題 2 (定理 2.3 の証明). q 二項係数の組み合わせ論的な公式 (定理 2.3) を思い出そう: 非負整数 n と $0 \leq k \leq n$ なる整数 k および文字 q に対し

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_s q^{i(s)}. \tag{$*$}$$

但し右辺の和の s は、0 と 1 を計 n 個並べてできる数列のうち 0 の個数が k 個のものを走る。この定理を以下の手順で証明せよ。

(1) 等式 $(*)$ の右辺を $\left\{\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right\}_q$ と書く。長さ $n+1$ の数列について先頭が 0 の場合と 1 の場合とに分けて考えて、$\left\{\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right\}_q$ が漸化式

$$\begin{Bmatrix} n+1 \\ k \end{Bmatrix}_q = \begin{Bmatrix} n \\ k-1 \end{Bmatrix}_q + q^k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}_q$$

を満たしていることを示せ。

(2) q 二項係数 $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_q$ の満たす漸化式 (定理 2.4) と (1) の漸化式を使って、数学的帰納法により上記の等式 $(*)$ を示せ。

問題 3 (Chu-Vandermonde の定理とその q 類似). k, m, n を非負整数、q を文字とする。

(1) 次の等式を証明せよ。

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \binom{n}{k-j}.$$

(2) 次の等式を証明せよ。

$$\begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{j=0}^{k} q^{(m-j)(k-j)} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}_q.$$